

## Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 14

(Lösungsvorschläge)

### Aufgabe 1

Zu jeder Frage gibt es drei Antwortmöglichkeiten, wobei genau eine davon richtig ist.

- (a) Seien  $X$  und  $Y$  zwei unkorrelierte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Dann gilt:
- $\text{Var}(XY) = \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$
  - $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
  - $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$
- (b) Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien  $A, B, C$  Ereignisse mit  $A, B, C \neq \emptyset$ .
- $\mathbb{P}(A^C \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
  - $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$
  - Wenn  $A \cap B = C$  und  $C \subset B$ , dann  $\mathbb{P}(A|B \cap C) = 1$ .

### Lösungsvorschlag:

- (a) Nur iii) ist richtig. Die Aussagen i) und ii) gelten **im Allgemeinen nicht** (zum Beispiel folgt aus der Unkorreliertheit im Allgemeinen nicht die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen, welche für Aussage ii) erforderlich ist).
- (b) Nur iii) ist richtig ( $\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B \cap C)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} = 1$ ). Die Aussagen i) und ii) gelten **im Allgemeinen nicht**: i) gilt nur, wenn zusätzlich  $A \subset B$  vorausgesetzt wird. Für ii) ist zusätzlich Unabhängigkeit von  $A, B$  und  $C$  erforderlich.

### Aufgabe 2

Die Koeffizienten  $p$  und  $q$  einer quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  werden zufällig im Intervall  $(0, 1)$  gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  dieser Gleichung reelle Zahlen sind? (Bem.: Die Lösungen sind reell, wenn die Diskriminante  $D = p^2 - 4q \geq 0$  ist)

### Lösungsvorschlag:

Vgl. Skript.

### Aufgabe 3

Ein fairer Würfel wird  $n$ -mal geworfen. Sei  $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ , wobei  $S_n$  die Anzahl der geworfenen Augenzahlen kleiner als 3 angibt (**also die Anzahl der Würfe mit Augenzahl kleiner als 3**). Der Würfel soll mindestens so oft geworfen werden, dass mit einer approximativen Sicherheit von mindestens 95% die Zufallsvariable  $\bar{X}_n$  um weniger als 0.02 von  $\frac{1}{3}$  abweicht.

- (a) Wie groß muss  $n$  nach dem zentralen Grenzwertsatz gewählt werden? (Hinweis:  $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ )

(b) Wie viele Würfe wären nach der Tschebyschew-Ungleichung erforderlich?

**Lösungsvorschlag:**

(a) Es gilt  $S_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ .

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{3}\right| \leq 0.02\right) \\
 = & \mathbb{P}\left(-0.02 \leq \frac{1}{n}\left(S_n - \frac{1}{3}n\right) \leq 0.02\right) \\
 = & \mathbb{P}\left(\frac{-0.02n}{\sqrt{n\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)}} \leq \frac{S_n - \frac{1}{3}n}{\sqrt{n\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)}} \leq \frac{0.02}{\sqrt{n\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)}}\right) \\
 \approx & \Phi\left(\frac{0.02n}{\sqrt{n \cdot \frac{2}{9}}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.02n}{\sqrt{n \cdot \frac{2}{9}}}\right) \\
 = & 2\Phi\left(\frac{0.02 \cdot 3n}{\sqrt{n2}}\right) - 1 \\
 \stackrel{!}{\geq} & 0.95
 \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}
 & \Phi\left(\frac{0.02 \cdot 3n}{\sqrt{n2}}\right) \geq 0.975 \\
 \Leftrightarrow & \frac{0.02 \cdot 3n}{\sqrt{n2}} \geq 1.96 \\
 \Leftrightarrow & n \geq 2134.\bar{2}
 \end{aligned}$$

Also  $n = 2135$ .

(b)

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{3}\right| \leq 0.02\right) \\
 = & 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{3}\right| \geq 0.02\right) \\
 \stackrel{\text{Tsch.-Ungl.}}{\geq} & 1 - \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{0.02^2} = 1 - \frac{\frac{1}{n^2}n\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{0.02^2} \\
 \stackrel{!}{\geq} & 0.95
 \end{aligned}$$

Also  $n \geq 11111.\bar{1}$ , d.h.  $n = 11112$ .

#### Aufgabe 4

Eine Firma produziert Fernsehgeräte. Mit Wahrscheinlichkeit 0.06 ist ein produziertes Gerät defekt. Bei der Endprüfung zeigt das Prüfgerät mit Wahrscheinlichkeit 0.85 bei defekten und mit Wahrscheinlichkeit 0.1 bei nicht defekten Geräten einen Fehler an. Ein zufällig ausgewählter Apparat werde nun geprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- (a) zeigt das Prüfgerät einen Fehler an?
- (b) ist dieser Fernsehapparat defekt, falls das Prüfgerät nichts anzeigt bzw. einen Fehler anzeigt?

#### Lösungsvorschlag:

$D$ : Gerät wird defekt produziert

$F$ : Bei der Prüfung wird ein Fehler angezeigt

Gegeben:  $\mathbb{P}(D) = 0.06$ ,  $\mathbb{P}(F|D) = 0.85$ ,  $\mathbb{P}(F|D^C) = 0.1$ .

(a)  $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(F|D^C)\mathbb{P}(D^C) = 0.85 \cdot 0.06 + 0.1 \cdot 0.94 = 0.145$

(b)  $\mathbb{P}(D|F^C) = \frac{\mathbb{P}(F^C|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(F^C)} = \frac{0.15 \cdot 0.06}{0.855} \approx 0.0105$