Prof. Dr. E. Spodarev / W. Karcher WS 2007/08
25.10.2007

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 2

(Abgabe: Donnerstag, 1.11.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es seien X, A und B Ereignisse einer Grundmenge Ω und es gelte

$$(X \cup A)^C \cup (X \cup A^C)^C = B.$$

Berechne X. (2)

(b) Zeige:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^C = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^C \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k^C = \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^C$$

(2)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die Menge $\{1, ..., N\}$ mit $N \in \mathbb{N}$ und eine beliebige feste Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq N$.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit p_N, dass eine zufällig aus $\{1, ..., N\}$ gezogene Zahl durch k teilbar ist. (2)

(b) Bestimme $\lim\limits_{N\to\infty} p_N$. (2)

Aufgabe 3 (7 Punkte)

(a) Die PIN-Nummer einer ec-Karte besteht aus jeweils 4 Ziffern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) alle Ziffern verschieden sind?

(ii) genau zwei gleiche Ziffern enthalten sind?

(iii) die Ziffern 3 und 4 je genau einmal vorkommen?

(iv) die Ziffern 3 und 4 je genau einmal vorkommen und dass die Ziffer 4 an der dritten Stelle steht? (4)

(b) Betrachte das gewöhnliche Zahlenlotto “6 aus 49” – ohne Zusatzzahl, Superzahl o.ä. Wie oft muss man mindestens Lotto spielen, um mindestens mit Wahrscheinlichkeit 0.5 mindestens einmal genau 3 Richtige zu haben? (3)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(a) Es werden k Kugeln auf n Fächer ($k, n \in \mathbb{N}$) so verteilt, dass jede Kugel mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedes Fach kommen kann, unabhängig davon, ob dieses Fach bereits besetzt ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt mindestens ein Fach leer? (3)

(b) Die Sekretärin von Herrn Müller soll n ($\in \mathbb{N}$) unterschiedliche Briefe an n verschiedene Geschäftspartner verschicken. Da sie heute etwas zerstreut ist, steckt sie die Briefe rein zufällig in die n verschieden adressierten Kuverts (aber so, dass jedes Kuvert nur einen Brief enthält). Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich mindestens ein Brief im richtigen Kuvert? (3)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

(a) Zeige: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) \leq \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(A_r) - \sum_{2 \leq r \leq n} \mathbb{P}(A_r \cap A_1)$ (3)

(b) Zeige: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{n} A_r\right) \leq \min_k \left\{ \sum_{r=1}^{n} \mathbb{P}(A_r) - \sum_{r:r \neq k} \mathbb{P}(A_r \cap A_k) \right\}$ (1)