Prof. Dr. E. Spodarev / W. Karcher

WS 2007/08
15.11.2007

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 4

(Abgabe: Donnerstag, 22.11.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei X eine absolutstetig verteilte Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (1 - x^2), & \text{falls } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{falls } |x| > 1. \end{cases}$$

Welchen Wert hat die Konstante c? Bestimme die Verteilungsfunktion von X und berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-0.5 < X < 0)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $X \sim B(n,p)$ mit $n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X gerade ist?

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Die Zufallsvariable Y beschreibe die Anzahl der Studenten, die zu einem bestimmten Zeitpunkt an der Mensa-Kasse anstehen. Y sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 1$. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Studenten, die an der Mensa-Kasse freundlich bedient werden. Falls in der Schlange $Y = i$ Studenten warten, werden davon $X = j$ Studenten mit folgender Wahrscheinlichkeit freundlich bedient:

$$\mathbb{P}(X = j | Y = i) = \binom{i}{j} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^j \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{i-j}, \quad j \in \{0, ..., i\}.$$

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden j Studenten ($j \in \mathbb{N}_0$) freundlich bedient? (3)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle anstehenden Studenten freundlich bedient? (2)

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Eine Münze wird dreimal geworfen, wobei “Kopf” mit Wahrscheinlichkeit p und “Zahl” mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ erscheint (Bernoulli Schema). Betrachte die Ereignisse $A = \{\text{höchstens einmal Kopf}\}$ und $B = \{\text{alle drei Würfe sind gleich}\}$. Für welche Werte von $p \in [0,1]$ sind A und B unabhängig?

Aufgabe 5 (5 Punkte)
In der amerikanischen Spielshow “Let’s make a deal” besteht die Möglichkeit, einen Hauptpreis in der Form eines Autos zu gewinnen. Auf der Bühne sind vier verschiedene Türen aufgebaut. Hinter genau einer, vom Spielleiter rein zufällig ausgewählten Tür, befindet sich der Hauptpreis, hinter den anderen drei Türen jeweils eine Ziege. Der Kandidat wählt eine der vier Türen aus, diese bleibt aber vorerst verschlossen. Der Spielleiter, der ja weiß, wo das Auto steht, öffnet daraufhin zwei der drei anderen Türen, und zwei meckernde Ziegen schauen ins Publikum. Der Kandidat hat nun die Möglichkeit, bei seiner ursprünglichen Wahl zu bleiben, oder die andere noch verschlossene Tür zu wählen.
Welche Strategie sollte der Kandidat verfolgen, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit das Auto zu gewinnen? Löse die Aufgabe mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Hinweise:

Definition 1:

Eine diskrete Zufallsvariable $X : \Omega \to \{0, 1, ...\}$ heißt Poisson-verteilt mit Parameter λ (Schreibweise: $X \sim Poi(\lambda)$), wenn für die Einzelwahrscheinlichkeiten $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ gilt:

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, ...; 0 < \lambda < \infty$$

Definition 2:

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

heißt Verteilungsfunktion von X.

Definition 3:

Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt absolutstetig, falls die Verteilungsfunktion F_X die folgende Integraldarstellung

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

besitzt, wobei $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine (Lebesgue-integrierbare) Funktion mit nichtnegativen Werten ist, die Dichte von X genannt wird.

Es gilt im absolutstetigen Fall:

- $F_X(\infty) := \lim_{x \to \infty} F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$