Prof. Dr. E. Spodarev / W. Karcher

WS 2007/08
29.11.2007

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 6

(Abgabe: Donnerstag, 6.12.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Der Zufallsvektor (X, Y) sei definiert auf dem Wahrsceinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und absolutstetig verteilt mit der gemeinsamen Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & , x > 0, y > 0 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei U eine auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeige, dass die Zufallsvariable $Y = -\frac{1}{\lambda}\log U$, $\lambda > 0$, exponentialverteilt ist mit dem Parameter $\lambda > 0$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Ein unverfälschter Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsvarialbe X bezeichne das Ergebnis des ersten Wurfes, und Y gebe die größere der beiden gewürfelten Augenzahlen an.

(a) Bestimme die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y. Berechne mit Hilfe der gemeinsamen Zähldichte die Randdichte von Y. (Gib jeweils die Herleitung der Einzelwahrscheinlichkeiten an und stelle die Ergebnisse in einer Wertetabelle dar) (3)

(b) Bestimme die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von Y gegeben $X = k$ für $k = 1, ..., 6$. (2)

Aufgabe 4 (4 Punkte)
$X_1, ..., X_n$ seien unabhängige Zufallsvariabe mit $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., n$. Zeige, dass $Y := \min\{X_1, ..., X_n\}$ exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda_1 + ... + \lambda_n$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Punkt in der grauen Fläche liegt, wobei die Fläche durch drei konzentrische Kreise und die Liniensegmente, die durch den Ursprung gehen, begrenzt ist. Der Radius des äußersten Kreises sei R, die Koordinaten X und Y des Punktes (X, Y) in der Ebene seien stochastisch unabhängig und die Verteilung von (X, Y) folge einer bivariaten Standard-Normalverteilung.