Prof. Dr. E. Spodarev / W. Karcher WS 2007/08
6.12.2007

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 7

(Abgabe: Donnerstag, 13.12.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Die ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ besitze die Verteilungsfunktion F_X. Bestimme die Verteilungsfunktion von

(a) $Y_1 = \min\{X, 4\}$ (2)

(b) $Y_2 = |X|$ (2)

(c) $Y_3 = \max\{X - 1, \min\{X, 7\}\}$ (2)

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es seien Zufallsvariable $X \sim F$ und $Y \sim G$ gegeben und es sei $(X, Y) \sim H$.
Zeige:

$$\max\{F(x) + G(y) - 1, 0\} \leq H(x, y) \leq \min\{F(x), G(y)\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und sei $S_n = X_1 + ... + X_n$. Zeige, dass $S_n \sim \text{Poi}(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$, falls $X_i \sim \text{Poi}(\lambda_i)$, $i = 1, ..., n$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Die Dichte der Gamma-Verteilung mit den Parametern $b > 0$ und $p > 0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$$

Seien X und Y stochastisch unabhängige und Gamma-verteilte Zufallsvariable mit den Parametern $b_X = 1$ und $p_X = \mu > 0$ bzw. $b_Y = 1$ und $p_Y = \nu > 0$. Zeige, dass

$$g(z) = \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(\mu)} z^{\mu - 1} (1 - z)^{\nu - 1} \mathbb{1}_{(0,1)}(z)$$

die Dichte von $\frac{X}{X+Y}$ ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Es sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und Y gleichverteilt auf $(-1, 2)$. Ferner seien X und Y unabhängig. Berechne die Dichte von X/Y.

Hinweise:

Aufgabe 2:
$X \sim F$ bedeutet, dass die Zufallsvariable X einer Verteilung mit Verteilungsfunktion F folgt.

Aufgabe 5:
In Satz 3.15 lautet die Formel für die Dichte der Zufallsvariable $Z = \frac{X_1}{X_2}$:

- $f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} |t| f_{(X_1, X_2)}(x \cdot t, t) dt$
- $f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} |t| f_{X_1}(x \cdot t) f_{X_2}(t) dt$, falls X_1 und X_2 unabhängig sind.