Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 8

(Abgabe: Donnerstag, 20.12.2007, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (7 Punkte)

(a) Bestimme den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariable $X \sim Bin(n, p)$.

(b) Die Zufallsvariable X besitze die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x^3(4-3x) & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme den Erwartungswert von X.

(c) Es sei $X \sim Exp(3)$. Bestimme den Erwartungswert für $Y_1 = e^{-X}$, $Y_2 = 2X$ und $Y_3 = \max\{X, \frac{1}{3}\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es soll die Höhe H des Ulmer Münsters gemessen werden. Bekannt sind die (exakt gemessene) Entfernung c des Messgerätes vom Ulmer Münster und der mit zufälligen Fehlern behaftete Winkel X (gemessen im Bogenmaß) zwischen Messgerät und Münsterspitze. Der Winkel X sei auf dem Interval (a, b) gleichverteilt, d.h., es gelte $X \sim U(a, b)$ mit $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

(a) Berechne die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $H = c \cdot \tan(X)$, und zeige, dass H die Dichte

$$f(t) = \frac{c}{b-a} \frac{1}{c^2+t^2} \mathbb{I}_{(c \cdot \tan(a), c \cdot \tan(b))}(t)$$

besitzt.

(b) Berechne den Erwartungswert von H.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeige, dass

$$\lim_{x \to -\infty} x \cdot F(x) = 0$$

eine notwendige Bedingung für die Existenz des Erwartungswertes von X ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Eine Pumpe sei ununterbrochen in Betrieb, bis sie ausfalle. Die Zufallsvariable X, die die zufällige Dauer der Funktionsfähigkeit der Pumpe beschreibt, sei absolutstetig mit Dichte $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, wobei $(\lambda > 0)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter sei bekannt, dass Pumpen dieser Bauart im Mittel 100 Stunden laufen, bis sie ausfallen.

(a) Wie ist der Parameter λ zu wählen, damit der Erwartungswert von X gleich der mittleren Laufzeit dieser Pumpen ist?

(b) Aus Sicherheitsgründen tauscht man eine Pumpe, sobald sie 100 Stunden lang im Einsatz war, gegen eine neue gleichartige aus. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable Y, welche die Einsatzzeit einer Pumpe beschreibt und berechnen Sie ihren Erwartungswert. (Die Einsatzzeit einer Pumpe ist die Zeit, die vergeht, bis die Pumpe entweder ausfällt oder aber ausgewechselt wird.)

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Ein Warenhaus hat einen Bestand von a Weihnachtsbäumen, $a \in \{0, ..., n\}$, nach denen die zufällige Nachfrage von X Stück besteht. Kann die Nachfrage durch den Bestand nicht gedeckt werden, entstehen Kosten von $p > 0$ € für jede nachträgliche Bestellung eines Baumes. Jeder nichtverkaufte Baum verursacht einen Verlust von $h > 0$ €.

(a) Bestimme die Zufallsvariable G(X) = "Kosten bei Bestand a und Nachfrage X" als Funktion von p und h.

(b) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}G(X)$ ("erwartete Kosten"), wenn X auf $\{0, 1, ..., n\}$ gleichverteilt ist.