

Übungen zu Wahrscheinlichkeitsrechnung - Blatt 9

(Abgabe: Donnerstag, 10.1.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, welche nur die drei Werte $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 5$ mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X , falls bekannt ist, dass $\mathbb{E}X = 3.5$ und $\text{Var}X = 1.15$ ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ein Zufallsvektor mit $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$ für $i = 1, \dots, n$.

(a) Zeige die folgende Identität:

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (3)$$

(b) Zeige, dass $\text{Cov}(\mathbf{X}) := (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ eine symmetrische und positiv semidefinite Matrix ist. (3)**Aufgabe 3** (6 Punkte)

Berechne den Erwartungswert und die Varianz der folgenden Verteilungen

(a) $\mathbb{P}(X = k) = -\frac{(1-p)^k}{k \ln p}$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$ (2)

(b) $\mathbb{P}(X > t) = \exp\{-\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\}$, $t > 0$, $T > 0$ (2)

(c) $F(x) = (1 - 0.8e^{1-x}) \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}$, $x \in \mathbb{R}$ (2)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X_1 und X_2 sei gegeben durch

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}, & \text{falls } x_1, x_2 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben.

(a) Berechne $\mathbb{E}X_1$, $\mathbb{E}X_2$ und $\text{Cov}(X_1, X_2)$. (4)

(b) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig? (1)

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Zu Weihnachten soll gewickelt werden. Hierzu schreibt jeder seinen Namen auf einen Zettel und legt diesen zusammengefaltet in eine Schale. Nachdem die Zettel gut gemischt wurden, zieht jeder einen Zettel. Dadurch wird zufällig und geheim bestimmt, wer wem ein Geschenk machen soll.

Sei X die Anzahl der Personen, die ihren eigenen Namen gezogen haben. Bestimme den Erwartungswert und die Varianz von X , falls insgesamt $n \in \mathbb{N}$ Personen teilnehmen.

Hinweis:

Fehler in Aufgabe 3(b):

Die Formel für $\mathbb{P}(X > t)$ muss

$$\mathbb{P}(X > t) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, \quad t > 0, T > 0$$

lauten.

*Ein frohes Fest und alles Gute für das Jahr 2008
wünscht das ganze WR-Team.*

