Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

Sei $X_t^n := \sum\limits_{i=0}^{n} \gamma_i \varepsilon_{t-i}$. Da $\varepsilon_{t-i} \sim N(0, \sigma^2)$, ist X_t^n normalverteilt mit

$$\mathbb{E} X_t^n = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \mathbb{E} \varepsilon_{t-i} = 0$$

und

$$\operatorname{Var}(X_t^n) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2 \operatorname{Var}(\varepsilon_{t-i}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2.$$

Die charakteristische Funktion von X_t^n ist somit gegeben durch

$$\varphi_n(t) = e^{-t^2/2 \cdot \sigma^2 \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2},$$

vgl. WR-Skript S.111. Daraus folgt

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = e^{-t^2/2 \cdot \sigma^2 \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \gamma_i^2} = e^{-t^2/2 \cdot \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^2}.$$

Dies ist die charakteristische Funktion der $N(0, \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^2)$-Verteilung. Mit dem Stetigkeitssatz (WR-Skript S. 131) folgt:

$$\lim_{n \to \infty} X_t^n = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \varepsilon_{t-i} \sim N(0, \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^2).$$