Übungen zu Ökonometrie - Blatt 7

(Abgabe: Donnerstag, 29.01.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein stationärer Prozess. Die *(Auto-)Kovarianzfunktion* von X ist definiert durch

$$R(s) := \mathbb{E}((X_s - \mathbb{E}(X_s))(X_0 - \mathbb{E}(X_0)), \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Für $R(0) \neq 0$ heißt die Funktion

$$B(s) := \frac{R(s)}{R(0)}, \quad s \in \mathbb{Z},$$

(Auto-)Korrelationsfunktion von X.

Zeige, dass die *(Auto-)Kovarianzfunktion* und die *(Auto-)Korrelationsfunktion* eines $MA(q)$-Prozesses gegeben sind durch

$$R(s) \;=\; \begin{cases} \sigma^2 \sum\limits_{j=0}^{q-|s|} \alpha_{j+|s|}\alpha_j, & \text{falls } |s| \leq q \\ 0, & \text{falls } q < |s| \end{cases}, \quad s \in \mathbb{Z},$$

bzw.

$$B(s) \;=\; \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{q-|s|} \alpha_{j+|s|}\alpha_j \Big/ \sum\limits_{j=0}^{q} \alpha_j^2, & \text{falls } |s| \leq q \\ 0, & \text{falls } q < |s| \end{cases}, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Auf der Homepage der Vorlesung befindet sich die Datei `bier.dat` mit Daten über die monatliche Bierproduktion einer Bierbrauerei zwischen Januar 1998 und Dezember 2001.

(a) Lese den Datensatz ein und wandle ihn in ein Zeitreihenobjekt um: (3)
```
> daten <- read.table(...)
> bier <- ts(daten, start=1998, frequency=12)
```
Plotte die Zeitreihe mit
```
> plot(bier)
```
und treffe Aussagen über den polynomialen Anteil (Trend) und den saisonalen Anteil sowie dessen Periode.

(b) Wir betrachten nun das Modell (2)

$$Z_t = T_t + S_t + X_t,$$

wobei $T_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2$ als Trend und $S_t = \beta_4 \sin(2\pi t)$ als saisonaler Anteil verwendet wird. Macht diese Modellannahme Sinn?

(c) Verwende die R-Funktion `lm()`, um die Koeffizienten β_1,..., β_4 zu schätzen: (4)
```
> t <- time(bier)
> lm.bier <- lm(bier ~ 1+t+I(t^2)+sin(2*pi*t))
```
Interpretiere alle aus der Vorlesung bekannten Größen nach Anwendung der Funktion `summary()`.

(d) Wir extrahieren nun den (hoffentlich) stationären Anteil X_t der Zeitreihe: (2)
```
> X <- lm.bier$residuals
```
Mit Hilfe von

$$\hat{R}(s) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-s} X_t X_{t+s}, \quad s \in 0, 1, ..., n-1$$

und

$$\hat{B}(s) := \frac{\hat{R}(s)}{\hat{R}(0)}, \quad s \in 0, ..., n-1$$

lassen sich die (Auto-)kovarianzfunktion und die (Auto-)korrelationsfunktion schätzen.

Die R-Funktion `acf()` (`help(acf)`) führt eine solche Schätzung durch. Bei der Ausgabe wird hierbei der Wert von s mit "Lag" bezeichnet. Die Höhe der Balken entspricht dem Wert der (Auto-)Kovarianz- bzw. (Auto-)Korrelationsfunktion. Verwende `acf()`, um die (Auto-)Korrelationsfunktion von `X` zu schätzen und interpretiere das Ergebnis. (Hinweis: Alle Balken, die zwischen den zwei blau-gestrichelten Geraden liegen, können als "von 0 nicht signifikant verschieden" angesehen werden)

(e) Warum könnte im Hinblick auf die (Auto-)Korrelationsfunktion ein $MA(q)$-Prozess zur Modellierung von X_t Sinn machen? Welche Ordnung q sollte ein solcher $MA(q)$-Prozess haben? (2)

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Auf der Homepage der Vorlesung befindet sich die Datei `flug.dat` mit Daten über die durchschnittlichen monatlichen Passagierzahlen pro Flugzeug einer Fluggesellschaft zwischen Januar 1990 und Dezember 1993. Analysiere den Datensatz analog zu Aufgabe 2 mit $S_t = \sin(2\pi t - \frac{\pi}{2})$ und $T_t = \ln(t - 1989)$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Es sei $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von unabhängigen $N(0,\sigma^2)$-verteilten Zufallsgrößen, wobei $\sigma^2 > 0$ gilt. Außerdem sei $(\gamma_i)_{i\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\gamma_0 = 1$ und $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^2 < \infty$. Zeige, dass $X_t := \sum\limits_{i=0}^{\infty} \gamma_i \varepsilon_{t-i}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ eine $N\left(0, \sigma^2 \sum\limits_{i=0}^{\infty} \gamma_i^2\right)$-verteilte Zufallsgröße ist. (Hinweis: Die Aussage kann (auch) mit charakteristischen Funktionen gelöst werden (vgl. WR-Skript WS2007/2008, S. 108 ff.))