

Übungen zu Ökonometrie - Blatt 8

(Abgabe: Donnerstag, 12.2.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Es seien $\sigma^2 > 0$, $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Folge unabhängiger $N(0, \sigma^2)$ -verteilter Zufallsgrößen. Wir definieren einen $MA(1)$ -Prozess $X \equiv (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mittels

$$X_t := \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Es bezeichne $K(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, die Kovarianzfunktion von X .

- (a) Verifiziere die Gültigkeit von (5)

$$\begin{aligned} K(0) &= \sigma^2 (1 + \alpha_1^2) \\ K(1) &= \sigma^2 \alpha_1. \end{aligned}$$

Wir fassen nun für bekannte $K(0)$ und $K(1)$ dieses Gleichungssystem als ein Gleichungssystem für (σ^2, α_1) auf. Berechne die zwei Lösungen des Gleichungssystems.

- (b) Seien $(\sigma_1^2, (\alpha_1)_1)$ und $(\sigma_2^2, (\alpha_1)_2)$ die beiden Lösungen des Gleichungssystems. (4)
Wir nehmen an, dass $(\sigma_1^2, \alpha_1) = (\sigma_1^2, (\alpha_1)_1)$ die wahren Parameter sind und definieren

$$\varepsilon'_t := \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \varepsilon_t$$

sowie

$$X'_t := \varepsilon'_t + (\alpha_1)_2 \varepsilon'_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Berechne den Erwartungswert und die Kovarianzfunktion von $X' \equiv (X'_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und zeige damit, dass die beiden Größen mit denen von X übereinstimmen.

- (c) Es seien $\hat{K}(0)$ und $\hat{K}(1)$ die im Abschnitt 3.3.1 des Skriptes vorgestellten Schätzer für $K(0)$ und $K(1)$. Diskutiere unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus (a) und (b) die Schätzung der Parameter σ^2 und α_1 auf Grundlage des Gleichungssystems (2)

$$\begin{aligned} \hat{K}(0) &= \hat{\sigma}^2 (1 + \hat{\alpha}_1^2) \\ \hat{K}(1) &= \hat{\sigma}^2 \hat{\alpha}_1. \end{aligned}$$

- (d) In Aufgabe 3 auf dem letzten Übungsblatt wird aufgrund der dort geschätzten Korrelationsfunktion ein $MA(1)$ -Prozess als geeignetes Modell herangezogen. Die Autokorrelationsfunktion wurde mit dem Befehl

```
> acf(res)
```

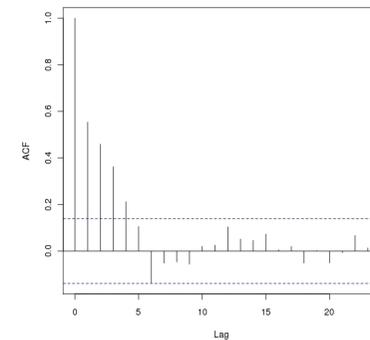
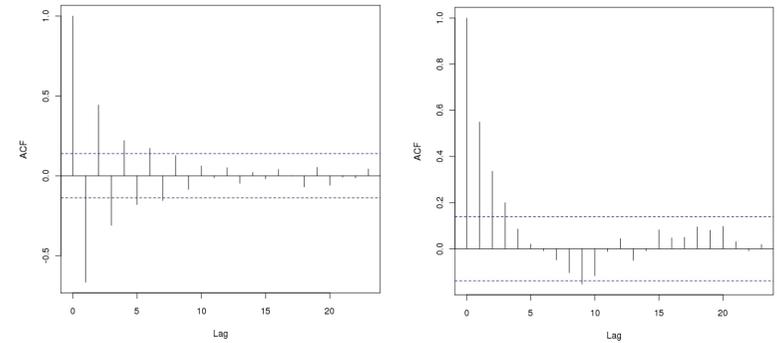
geschätzt (vgl. das R-Skript `flug.R` auf der Homepage). Verwende den Befehl

```
> acf(res, type="covariance")
```

um die Kovarianzfunktion zu schätzen, lese die Werte $\hat{K}(0)$ und $\hat{K}(1)$ aus dem Schaubild ab und schätze damit α_1 und σ^2 .

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Gegeben seien die Korrelationsfunktionen folgender Zeitreihen mit $\mathbb{E}\varepsilon_t^2 = \sigma^2 = 1$.



Entscheide jeweils, ob ein $AR(1)$ - oder $MA(q)$ -Prozess zugrunde liegen könnte, bestimme im Falle eines $AR(1)$ -Prozesses den Koeffizienten durch Ablesen aus dem Schaubild und im Falle eines $MA(q)$ -Prozesses die Ordnung q .

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Auf der Homepage befindet sich ein Datensatz einer Zeitreihe, bei der der Trend und die saisonale Komponente schon herausgefiltert wurden. Lese die Daten ein und passe ein $ARMA(2, 3)$ -Modell mittels

```
> arima(daten, order=c(2,0,3))
```

an die Daten an. Interpretiere den Output.