Extremwertverteilungen

Seminar Statistik

Thomas Bäumer, Laurent Ruggiu

Institut für Stochastik

12. Februar 2009

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Sei $X_1, X_2, X_3, \ldots$ eine Folge von iid ZVen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F.

Definition Stichprobenmaximum

$M_1 := X_1$ und $M_n := max(X_1, \ldots, X_n), \quad n \geq 2$

Definition Rechter Endpunkt

$x_F := sup\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{F(x)} < 1\}$

Definition: Tail

$\overline{F} := 1 - F$

Wir erhalten damit sofort für alle $x < x_F$,

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) \to 0, n \to \infty$$

und in dem Fall $x_F < \infty$ erhalten wir für $x \geq x_F$, daß

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) = 1.$$

Daher $M_n \stackrel{P}{\to} x_F$ für $n \to \infty$, falls $x_F \leq \infty$ ist.
Weil die Folge (M_n) nicht absteigend ist in n, konvergiert sie fast sicher und daher schließen wir , daß

$$M_n \stackrel{f.s.}{\to} x_F, n \to \infty.$$

Zentraler Grenzwertsatz

Sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen unabhängig identisch verteilten (iid) Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_k^2 < \infty$ und $Var(X_i) > 0$, dann gilt

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{nVarX_1}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

In der Extremwertheorie stellt man sich die Frage, ob für das Maximum von unabhängig identisch verteilten ZV $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Verteilungsfunktion F eine Art ZGWS existiert, d.h. existieren Folgen $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} G,$$

wobei G eine Verteilungsfunktion ist.

Definition Maxstabile Verteilung

Eine ZV X (und ihre dazugehörige Verteilungsfunktion) nennen wir Maxstabil, wenn sie die Gleichung

$$max(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} c_n X + d_n, \quad n > 0, \quad d_n \in \mathbb{R} \quad \forall \mathrm{n} \geq 2.$$

für iid $X, X_1,\dots,X_n$ und geeignete Konstanten c_n und d_n erfüllt.

Grenzwerteigenschaften

Grenzwerteigenschaften von Maxstabilen Gesetzen

Die Klasse der max-stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse aller möglichen Grenzverteilungen für Maxima von iid ZVen überein.

Für zwei ZV X und Y schreiben wir

$$X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y$$

wenn X, Y die gleiche Verteilung haben.

Zwei ZV gehören zum selben Typ, falls Konstanten existieren $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ so dass

$$X \stackrel{\mathrm{d}}{=} bY + a$$

.

Konvergenztypen-Theorem

Seien $A, B, A_1, A_2, \ldots$ ZVen und $b_n > 0, \beta_n > 0$ und $a_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sind Konstanten. Wenn

$$b_n^{-1}(A_n - a_n) \xrightarrow{d} A,$$

dann gilt die Relation

$$\beta_n^{-1}(A_n - \alpha_n) \xrightarrow{d} B, (1)$$

genau dann wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\beta_n} = b \in [0, \infty), \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \alpha_n}{\beta_n} = a \in \mathbb{R}, (2)$$

Konvergenztypen-Theorem

Falls (1) gilt, dann ist $B \stackrel{\mathrm{d}}{=} bA + a$ und a,b sind die einzigen Konstanten für welche dies gilt. Wenn (1) gilt, dann ist A nicht-entartet genau dann wenn $b > 0$, und dann gehören A und B zum selben Typ.

Fisher-Tippett Theorem, Grenzwertsatz von Maxima

Sei (X_n) eine Folge von iid ZVen. Falls Normierungskonstanten $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ existieren und eine Verteilungsfunktion H, so dass

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H,$$

dann gehört H zu einem der drei folgenden Typen von Verteilungsfunktionen:

Fisher-Tippett Theorem, Grenzwertsatz von Maxima

Fréchet: $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0.$

Weibull: $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x^{\alpha})\}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0.$

Gumbel: $\Lambda(x) = exp\{-e^{-x}\} \qquad x \in \mathbb{R}$

Beweis

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H,$$

impliziert für $t > 0$,

$$F^{[nt]}(c_{[nt]}x + d_{[nt]}) \to H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

wobei[*] die Gaußklammer bezeichnet. Jedoch,

$$F^{[nt]}(c_n x + d_n) = (F^n(c_n x + d_n))^{\frac{[nt]}{n}} \to H^t(x),$$

mit dem Konvergenztypen Theorem folgt dann: Es existieren Funktionen $\gamma(t) > 0, \delta(t) \in \mathbb{R}$ die

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{[nt]}} = \gamma(t), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{d_n - d_{[nt]}}{c_{[nt]}} = \delta(t), t > 0$$

Beweis-Fortsetzung:

$$H^t(x) = H(\gamma(t)x + \delta(t))$$

Es ist nicht schwierig daraus zu folgern, daß für $s, t > 0$

$$\gamma(st) = \gamma(s)\gamma(t), \quad \delta(st) = \gamma(t)\delta(s) + \delta(t).$$

Beispiel:
Sei (X_i) eine Folge von iid Standard-Cauchy-ZV. Die Standard-Cauchy-Verteilung ist absolut stetig mit der Dichte:

$$f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}, x \in \mathbb{R}$$

Mit l'Hospital erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{(\pi x)^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{\pi^{-1}x^{-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi x^2}{\pi(1+x^2)} = 1,$$

Damit erhalten wir $\overline{F} \sim (\pi x)^{-1}$. Dies impliziert:

$$P\left(M_n \leq \frac{nx}{\pi}\right) = \left(1 - \overline{F}\left(\frac{nx}{\pi}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x} + o(1)\right)\right)^n$$

$$\to \exp\{-x^{-1}\} = \Phi_1(x), x > 0$$

Maximum Domain of Attraction

Defintion Maximum Domain of Attraction

Wir sagen daß die ZV X (die Verteilungsfunktion F von X, Die Verteilung von X) zu dem gleichem Maximum Domain of Attraction der Extremwertverteilung H gehört, falls Konstanten $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$ gilt. Wir schreiben $X \in MDA(H)$

Poisson-Approximation

Für gegebenes $\tau \in [0, \infty]$ und eine Folge (u_n) von reellen Zahlen sind folgende Aussagen Äquivalent.

$$n\overline{F}(u_n) \to \tau,$$

$$P(M_n \leq u_n) \to \exp(-\tau),$$

Zur Erinnerung: Die Extremwertverteilungen sind stetig auf $\mathbb{R}$, daher ist $c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$ äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \leq c_n x + d_n) = \lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Charakterisierung der MDA(H)

Die Verteilungsfunktion F gehört zum MDA von der Extremwertverteilung H mit den Normierungskonstanten $c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ genau dann wenn

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(c_n x + d_n) = -\ln H(x), x \in \mathbb{R}$$

.
Falls $H(x) = 0$ interpretieren wir den Grenzwert als ∞.

Definition Regulär Variierend

Ein Verteilungs-Tail $\overline{F}$ heißt regulär variierend, mit Index $-\alpha$ für ein $\alpha > 0$, falls

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xt)}{\overline{F}(x)} = t^{-\alpha}, \quad t > 0$$

Schreibweise: $\overline{F} \in R_{-\alpha}$
Falls $\alpha = 0$ heißt der Verteilungs-Tail langsam variierend.

Definition Tail-äquivalent

Zwei Verteilungsfunktionen F und G werden Tail-äquivalent, falls sie den selben rechten Endpunkt besitzen, z.B. $x_F = x_G$, und für Konstanten $0 < c < \infty$

$$\lim_{x \to x_F} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c$$

gilt.

Mit der Taylorentwicklung erhalten wir

$$1 - \phi(x) = 1 - \exp\{(-x^{-\alpha})\} \sim x^{-\alpha}, x \to \infty$$

Für $F \in MDA(\phi_\alpha)$ kann die Konstante $d_n = 0$ gewählt werden und c_n mit Hilfe der Quantilfunktion. Genauer:

$$c_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) = inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{F(x) \geq 1 - n^{-1}}\}$$

$$= inf\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{(\frac{1}{\overline{F}})(x) \geq n}\} = \mathrm{(\frac{1}{\overline{F}})^{\leftarrow}(n)}$$

MDA der Fréchet-Verteilung

Die Verteilungsfunktion F gehört zum $MDA(\Phi_\alpha)$, $\alpha > 0$, genau dann wenn $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$ für eine langsam variierende Funktion L gilt.

Falls $F \in MDA(\Phi_\alpha)$, dann ist $c_n^{-1}M_n \xrightarrow{d} \Phi_\alpha$ wobei die Normierungskonstante c_n entsprechend dem obigem gewählt werden kann.

$$F \in MDA(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow \overline{F} \in R{-\alpha}$$

Von vorher wissen wir das die Standard-Cauchy-Verteilung mit l'Hospital zu folgender Relation führt:
$\overline{F} \sim (\pi x)^{-1}$
$\Rightarrow \overline{F} \in R_{-1} \Rightarrow \in MDA(\Phi_1)$ und als Normierungskonstante wählen wir $c_n = (\pi n)$. Damit folgt:

$$(\pi n)^{-1} M_n \xrightarrow{d} \Phi_1(x)$$

MDA der Weibull-Verteilung

Die Verteilungsfunktion F gehört zum $MDA(\Psi_\alpha)$, $\alpha > 0$, genau dann wenn $x_F < \infty$ und $\overline{F}(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha}L(x)$ für eine langsam variiernde Funktion L.
Falls $F \in MDA(\Psi_\alpha)$, dann ist

$$c_n^{-1}(M_n - x_F) \xrightarrow{d} \Psi_\alpha$$

wobei die Normierungskonstanten $c_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$ und $d_n = x_F$ gewählt werden können.

Die Verteilungsfunktion mit rechtem Endpunkt $x_F \leq \infty$ gehört zu dem MDA(Λ) genau dann wenn ein $x \leq x_F$ existiert, so daß F folgende Darstellung besitzt

$$\overline{F}(x) = c(x) \exp - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt, z < x \leq x_F$$

wobei c und g meßbare Funktionen sind die $c(x) \to c > 0, g(x) \to 1$ genügen, wenn $x \uparrow x_F$ und a(x) eine positive absolut setige Funktion (in Bezug auf das Lebesguemaß) ist mit der Dichte $a^{'}(x)$ für die gilt $\lim_{x \to x_F} a^{'}(x) = 0$.
Für ein F mit der obigen Darstellung können wir $d_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$ und $c_n = a(d_n)$ als Normierungskonstanten wählen.

Verallgemeinerte Extremewertverteilung

Führen wir noch einen Parameter ξ ein, so können wir die drei Standardfälle in einer Familie von Verteilungsfunktionen darstellen.

$$\begin{cases} \xi = \alpha^{-1} > 0 & \textit{entspricht} \quad \textit{Fréchetverteilung} \quad \Phi_\alpha \\ \xi = 0 & \textit{entspricht} \quad \textit{Gumbel} \quad \Lambda \\ \xi = \alpha^{-1} < 0 & \textit{entspricht} \quad \textit{Weibull} \quad \Psi_\alpha \end{cases}$$

Verallgemeinerte Extremewertverteilung (GEV)

Verallgemeinerte Extremwertverteilung

Definiere die Verteilungsfunktion H_ξ so:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(1+\xi x)^{\frac{1}{\xi}}\}, & \textit{für} \quad \xi \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\}, & \textit{für} \quad \xi = 0 \end{cases} \quad \text{wobei } 1+\xi x > 0.$$

Der Fall $\xi = 0$ folgt aus $\xi \neq 0$ für $\xi \to 0$, da

$$(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}} \overset{\xi \to 0}{\longrightarrow} e^{-x}$$

Wir nennen H_ξ die verallgemeinerte Extremwertverteilung (GEV).

Charakterisierung der $MDA(H_\xi)$

Für ein $\xi \in \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $F \in MDA(H_\xi)$.
2. Es existiert eine positiv messbare Funktion $a(\cdot)$ so daß für $1 + \xi x > 0$ gilt:

$$\lim_{u \to x_F} \frac{\overline{F}(u + xa(\cdot))}{\overline{F}(u)} = \begin{cases} (1 + \xi x)^{\frac{1}{\xi}}, & f\ddot{u}r \quad \xi \neq 0 \\ \exp\{-x\}, & f\ddot{u}r \quad \xi = 0 \end{cases}$$

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion $F \in MDA(H_\xi)$, dann kann man Punkt 2 folgendermaßen umschreiben:

$$\lim_{u \to x_F} P\left(\frac{X-u}{a(u)} > x \,\middle|\, X > u\right) = \begin{cases} (1+\xi x)^{\frac{1}{\xi}}, & f\ddot{u}r \quad \xi \neq 0 \\ \exp\{-x\}, & f\ddot{u}r \quad \xi = 0 \end{cases}$$

Definition Verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD)

Definiere die Verteilungsfunktion G_ξ mit

$$G_\xi = \begin{cases} 1 - (1+\xi x)^{\frac{1}{\xi}}, & f\ddot{u}r \quad \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\{-x\}, & f\ddot{u}r \quad \xi = 0 \end{cases}$$

wobei

$$\begin{cases} x \geq 0, & f\ddot{u}r \quad \xi \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -\frac{1}{\xi} & f\ddot{u}r \quad \xi < 0 \end{cases}$$

Wir nennen G_ξ die verallgemeinerte Paretoverteilung (GPD).

Zusammenfassung

Die GEV

$$H_\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

beschreibt die Grenzwertverteilung der Maxima.

Die GPD

$$G_\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

beschreibt die Grenzwertverteilung der Überschreitungen von hohen Schwellwerten.

Der Multivariate Fall

Im folgenden sind alle Operationen Komponentenweise zu verstehen.

z.B.

$x < y \rightarrow x^{(i)} < y^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq d$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}} : \quad \mathrm{a} < \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\} = \{(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{d}) : \quad \mathrm{a}_\mathrm{i} < \mathrm{x}_\mathrm{i} \leq \mathrm{b}_\mathrm{i}\}$

Definition d-variater Maxima

Sei $X_i = (X_{i,1}, \ldots, X_{i,d}), \quad i \leq n$ eine Folge von iid d-variaten Vektoren mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F.
Das d-variate Maximum is definiert als:

$$M_n = max_{i \leq n}(X_i) := \left(max_{i \leq n}(X_{i,1}), \ldots, max_{i \leq n}(X_{i,d})\right)$$

Multivariate Extremwertverteilungen

Definition MDA und Extremwertverteilung

Die Verteilungsfunktion F gehört zum MDA einer Funktion G, genau dann wenn, $\forall x \in \mathbb{R}^d, n \to \infty$ gilt:

$$F^n(c_{n,1}x_1 + d_{n,1}, \ldots, c_{n,d}x_d + d_{n,d}) \to G(x)$$

für geeignete Vektoren $\boldsymbol{c_n} > 0$ und $\boldsymbol{d_n}$.
G heißt multivariate Extremwertverteilung.

Für die j-ten Randverteilungen F_j und G_j gilt:

$$F_j^n(c_{n,j}x_j + b_{n,j}) \to G_j(x_j)$$

Max Stabil

Definition Max-stabile Verteilung

Eine Verteilung F heißt max-stabil, falls $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F^n(d_n + c_n x) = F(x)$$

für geeignete Vektoren $\boldsymbol{c_n} > 0$ und $\boldsymbol{d_n}$.

Satz

Die Familie der Extremwertverteilungen stimmt exakt mit der Familie der max-stabilen Funktionen überein.

Definition Einfach

Eine max-stabile Verteilungsfunktion F heißt einfach, falls alle ihre Randverteilungen Fréchet verteilt sind.
d.h. $F_{1.\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad x > 0, \alpha > 0$

Definition max-id

Eine Verteilungsfunktion $F(x) \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ heißt max-id falls es $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{F_n(x)} \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ gibt, so daß:

$$F(x) = F_n^n(x)$$

d.h. falls $F^{1/n}(x)$ eine Verteilungsfunktion ist.

Definition unterer Endpunkt

Der untere Endpunkt einer max-id d-variaten Verteilungsfunktion F ist definiert durch:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

wobei α_j den linken Endpunkt der j-ten Randverteilung $F_j(x)$ bezeichnet, für $0 < F_j(x) < 1$.

Definition Exponenten Maß

Das Exponentenmaß ν von einer max-id VF F ist definiert, mit $x \in (\alpha, \infty]$ durch:

$$\nu([\alpha, \infty) \setminus [\alpha, x]) := -\ln F(x)$$

wobei α der untere Endpunkt von F ist.

Darstellung mit ν

Darstellung mit Exponentenmaß

Eine max-id VF F kann dargestellt werden durch:

$$F(x) = \begin{cases} exp(-\nu([-\infty, x]^c)), & x \geq \alpha; \\ 0, & sonst \end{cases}$$

mit $\alpha \in [-\infty, \infty) := [-\infty, \infty)^d$ und ν der zu F gehörige Exponentenmaß.

Aus $F(x) > 0$ für $x > \alpha$ folgt das α der untere Endpunkt ist.

Eigenschaften von ν

Das Maß ν hat folgende Eigenschaften:

(a) ν ist konzentriert auf $[\alpha, \infty) \setminus \{\alpha\}$
(b) $\nu([-\infty, t]^c) < \infty \quad \forall t > \alpha$

De Haan-Resnick Darstellung

Betrachte eine einfache, d-variate max-stabile VF F.
Dann gilt, für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^d$:

$$F^n(n^{1/\alpha}x) = F(x)$$

Daraus folgt:

$$F^{n/m}((n/m)^{1/\alpha}x) = F(x), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$$

Wähle n,m so daß $n/m \to t^\alpha > 0$. Dann folgt, mit der Stetigkeit von F:

$$F^{t^\alpha}(tx) = F(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d$$

Da F auch max-id ist, folgt aus der vorherigen Darstellung:

$$F(x) = exp(-\nu([0, x]^c))$$

De Haan-Resnick Darstellung

mit ν der zu F gehörige Exponentenmaß, der konzentriert ist auf $E := [0, \infty) \setminus \{0\}$
Es gilt:

$$\nu([0,x]^c) = t^\alpha \nu([0,tx]^c) = t^\alpha \nu(t[0,x]^c)$$

Nun können wir diese Gleichung erweitern zu:

$$\nu(B) = t^\alpha \nu(tB)$$

wobei B eine Borelmenge ist und $tB := \{tx : x \in B\}$

Für $t > 0$ und eine beliebige Borel Untermenge A von $S_E := \{z \in E : \|z\| = 1\}$ in E folgt:

$$\nu\left(\left\{x \in E : \|x\| \geq t, \quad \frac{x}{\|x\|} \in A\right\}\right)$$

De Haan-Resnick Darstellung

$$= t^{-\alpha}\nu\left(\left\{y \in E : \|y\| \geq 1, \quad \frac{y}{\|y\|} \in A\right\}\right) := t^{-\alpha}\phi(A).$$

ϕ ist das Winkelmaß.

Definiere $T : E \to (0,\infty) \times S_E$ durch $T(x) := (\|x\|, \frac{x}{\|x\|})$

Das Maß $(T\nu)(B) := \nu(T^{-1}(B))$ erfüllt:

$$(T\nu)([t,\infty) \times A) = \nu\left(\left\{x \in E : \|x\| \geq t, \quad \frac{x}{\|x\|} \in A\right\}\right)$$

$$= \frac{1}{t^\alpha}\phi(A)$$

$$= \int_{[t,\infty)\times A} \quad \alpha^{-1} r^{-(\alpha+1)} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi(\boldsymbol{a})$$

De Haan-Resnick Darstellung

Es gilt: $\nu([o,x]^c) = \nu([o,x]^c \cap E) = (T\nu)(T[o,x]^c \cap E)$
Und $T([o,x]^c \cap E)$
$= T(\{y \in E : y_i > x_i \quad \text{für manche } i \leq d\})$
$= \{(r,\boldsymbol{a}) \in (o,\infty) \times S_E : (r\boldsymbol{a})_i > x_i \quad \text{für manche } i \leq d\}$
$= \{(r,\boldsymbol{a}) \in (o,\infty) \times S_E : ra_i > x_i \quad \text{für manche } i \leq d\}$
$= \{(r,\boldsymbol{a}) \in (o,\infty) \times S_E : r > min_{i \leq d}(x_i/a_i)\}$

De Haan-Resnick Darstellung

Insgesamt erhalten wir:

$$\nu([o,x]^c) = (T\nu)\Big(\{(r,a) \in (0,\infty) \times S_E : r > min_{i\leq d}(x_i/a_i)\}\Big)$$

$$= \int_{S_E} \int_{(min_{i\leq d}(x_i/a_i,\infty))} \quad \alpha^{-1} r^{-(\alpha+1)} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi(a)$$

$$= \int_{S_E} \frac{1}{min_{i\leq d}(x_i/a_i)^\alpha} \,\mathrm{d}\phi(a) = \int_{S_E} max_{i\leq d}\left(\frac{a_i}{x_i}\right)^\alpha \mathrm{d}\phi(a)$$

De Haan-Resnick Darstellung

Somit haben wir die De Haan-Resnick Darstellung hergeleitet:

$$F(x) = \exp\left(- \int_{S_E} max_{i \leq d} \left(\frac{a_i}{x_i}\right)^{\alpha} d\phi(a) \right), \quad x \in [0, \infty)$$

für eine einfache, max-stabile Verteilungsfunktion F.