Rice-Formel & Verallgemeinerungen

Torben Freisinger Stefan Schindler

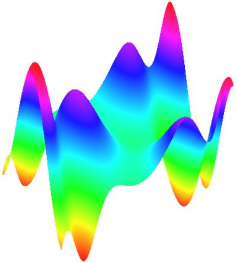
Seminar Zufällige Felder
Universität Ulm

16. Dezember 2008

Inhalt

Motivation

Wir wollen den Erwartungswert der Eulercharakteristik von Exkursionsmengen bestimmen.



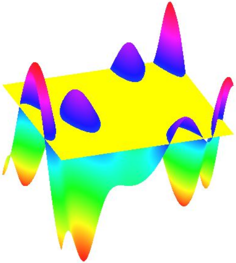


Abbildung: ein beliebiges “Gebirge”[1]

[1] Quelle: M.Göbel, D.Neuhäuser: Exkursionsmengen und ihre Eulercharakteristik

Hinweis

In diesem Abschnitt betrachten wir den einfachsten Spezialfall des späteren Metatheorems.

Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, dass die Rechtfertigung, welche die in diesem Abschnitt betrachteten Umformungen und Behauptungen benötigen, später im allgemeinen Fall gegeben wird.
(So wird z.B. die Existenz aller Ableitungen angenommen.)

Definition

In diesem Abschnitt sind wir in $\mathbb{R}^1$.

- Upcrossings
  Sei f ein reeller stochastischer Prozess auf $[0, T]$, $u \in \mathbb{R}^1$.
  Dann ist die Anzahl der **Upcrossings** von f zum Niveau u im Intervall $[0, T]$ def. durch:

$$N_u^+(0, T) = \#\{t \in [0, T] : f(t) = u, f'(t) > 0\}$$

Wir setzen voraus:

1. $N_u^+(0, T)$ ist endlich.
2. $t \in N_u^+(0, T)$ sind isolierte Punkte , d.h. man kann jedes t mit einem Intervall I überdecken, welches keine anderen $t \in N_u^+$ enthält und in denen $f' > 0$ ist.

Definition

- **Delta-Dirac-Funktion**

  Die Delta-Dirac-Funktion δ ist definiert durch

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta(y-u)g(y)\,\mathrm{d}y = g(u),$$

so dass für $\quad \delta_\varepsilon(y-u) := \frac{1}{|B_\varepsilon(u)|}\mathbf{1}_{y\in B_\varepsilon(u)}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta(y-u)g(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(y-u)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

wobei g eine geeignete Funktion ist,
$B_\varepsilon(u) := \{y \in \mathbb{R}^N : ||y-u|| < \varepsilon\} \quad \forall\varepsilon > 0$
und es gilt

$$\int\limits_{B_\varepsilon(u)} \delta_\varepsilon(y-u)\,\mathrm{d}y = 1.$$

Ziel

Erwartungswert der Upcrossings berechnen
Wir behandeln δ so als wäre es eine glatte Funktion und erhalten durch Substitution:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \delta(y-u)\,\mathrm{d}y = \int_{I} \delta(f(t)-u) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Durch zusammenfügen all dieser Intervalle I, erhalten wir:

$$N_u^+(0,T) = \int_0^T \delta(f(t)-u) \mathbf{1}_{f'(t)>0} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

(Punkte außerhalb der Intervalle tragen keinen Beitrag dazu bei.)

Rice-Formel

Wir legen Erwartungswert darüber und erhalten durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge:

$$\mathbb{E}(N_u^+(0,T)) = \int_0^T \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta(x-u) y p_t(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^T \int_0^\infty y p_t(u,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}t,$$

wobei $(f(t), f'(t))$ die gemeinsame Wkt.dichte p_t besitzt.

Dies ist die **Rice-Formel** in ihrer grundlegendsten Form.

Definition

- Gauß-Prozess
  Ein stochastischer Prozess $\{f(t,\omega) : t \in X, \omega \in \Omega\}$ heißt **Gauß-Prozess**, falls $\forall n \in \mathbb{N}, t_1, ..., t_n \in X$: $(f(t_1), ..., f(t_n))$ multivariat normalverteilt ist.

Wir nennen den Gauß-Prozess f **zentriert**, falls $\mathbb{E}(f(t)) = 0 \ \forall t \in X$.

Definition

- Kovarianzfunktion
  Die Funktion

$$\mathrm{Cov}(f(s), f(t)) = C(s,t)$$
$$:= \mathbb{E}[(f(s) - \mathbb{E}[f(s)])(f(t) - \mathbb{E}[f(t)])] \stackrel{\text{zentriert}}{=} \mathbb{E}[f(s)f(t)]$$

bezeichne die Kovarianzfunktion.

klassische Rice-Formel

Von besonderem Interesse ist der Gaußsche Fall:

Sei f ein zentrierter Gaußscher Prozess mit Varianz 1
$\Rightarrow f(t)$ und $f'(t)$ sind unabhängig $\forall t \in T$ und f' hat auch EW 0.
Bezeichne Varianz von $f'(t)$ mit λ_t und wir erhalten:

$$\mathbb{E}(N_u^+(0,T)) = \frac{e^{-u^2/2}}{2\pi} \int_0^T \lambda_t^{1/2} \, \mathrm{d}t$$

Im stationären gaußschen Fall mit $\lambda_t \equiv \lambda$ vereinfacht sich die Formel zu:

$$\mathbb{E}(N_u^+(0,T)) = \frac{\lambda^{1/2} T}{2\pi} e^{-u^2/2},$$

welche als die **klassische Rice-Formel** bezeichnet wird.

Zusammenhang

Wir betrachten nun den Zusammenhang der Rice-Formel zu Exkursionsmengen A_u und ihrer Eulercharakteristik $\varphi(A_u)$, wobei

$$\varphi(A_u(f,[0,T])) = \mathbb{1}_{(f(0)\geq u)} + N_u^+(0,T),$$

und somit ergibt sich:

$$\mathbb{E}(\varphi(A_u(f,[0,T]))) = \mathbb{P}(f(0)\geq u) + \mathbb{E}(N_u^+(0,T)) \\ \left(= \mathbb{P}(f(0)\geq u) + \frac{\lambda^{1/2}T}{2\pi} e^{-u^2/2} \right),$$

wobei der geklammerte Ausdruck nur im stationären Fall gilt.

Man sieht: Je größer λ, desto größer der Erwartungswert.

Verallgemeinerung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem Metatheorem über die erwartete Anzahl an Punkten, in denen ein vektorwertiges Zufallsfeld Werte in einer gewissen Menge annimmt.

Dies kann als Verallgemeinerung der Rice-Formel angesehen werden.

Annahmen

- Seien $f = (f^1, ..., f^N)$ und $g = (g^1, ..., g^K)$ $\mathbb{R}^N-$ bzw. $\mathbb{R}^K-$ wertige N-parametrische Zufallsfelder (N,K $\geq$ 1).
- $T \subset \mathbb{R}^N$ kompakt
- $B \subset \mathbb{R}^K$, B offen
- zur Notation:

$$(\nabla f)(t) = \nabla f(t) = (f_j^i(t))_{i,j=1,...,N} = \left(\frac{\partial f^i(t)}{\partial t_j} \right)_{i,j=1,...,N},$$

wobei wir annehmen, dass alle Ableitungen in einem f.s. Sinn existieren.

Definition

- N_u
  Bezeichne nun N_u mit

$$N_u = N_u(f, g : T, B)$$

die Anzahl der Punkte in T für die gilt:

$$f(t) = u \in \mathbb{R}^N \quad \& \quad g(t) \in B \subset \mathbb{R}^K$$

Voraussetzungen

1. Alle Komponenten von f,∇f und g sind f.s. stetig und haben endliche Varianz (über T).
2. Die Randdichten $p_t(x)$ von $f(t)$ sind stetig in $x = u\ \forall t \in T$.
3. Die bed. Wkt.dichten $p_t(x|\nabla f(t), g(t))$ von $f(t)$ sind nach oben beschränkt und glm. stetig in $x = u\ \forall t \in T$.
4. Die bed. Wkt.dichten $p_t(z|f(t) = x)$ von $\det \nabla f(t)$ sind glm. stetig für z und x in einer Umgebung von 0 und u $\forall t \in T$.
5. Die bed. Wkt.dichten $p_t(v|f(t) = x)$ von $g(t)$ sind glm. stetig $\forall v$ und für x in einer Umgebung von u $\forall t \in T$.
6. Die Momenten-Bedingung gilt:
$$\sup_{t \in T} \max_{1 \le i,j \le N} \mathbb{E}\left\{\left|f_j^i(t)\right|^N\right\} < \infty$$
7. von f,∇f und g genügen für $\eta \to 0$ und $\forall \varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}(\omega(\eta) > \varepsilon) = o(\eta^N).$$

Metatheorem

Seien f, g, T, B wie vorher beschrieben und seien die vorangestellten Voraussetzungen erfüllt, dann gilt:

$$\mathbb{E}(N_u) = \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^D} |\det \nabla y| \mathbb{1}_{(v \in B)} p_t(u, \nabla y, v) \,\mathrm{d}(\nabla y) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}t,$$

wobei $D = N^2 + K$ und $p_t(x, \nabla y, v)$ die gemeinsame Wkt.dichte von $(f(t), \nabla f(t), g(t))$.

Gaußscher Fall

Im zentrierten gaußschen Fall vereinfachen sich die Voraussetzungen folgendermaßen:

- f, g gaußsch $\Rightarrow$ alle auftretenden Rand-/bed. Wkt.dichten sind auch gaußsch und somit folgt ihre Beschränktheit & Stetigkeit, falls alle verbundenen Kovarianzmatrizen nicht entartet sind (was wir deshalb voraussetzen).

$\Rightarrow$ alle Varianzen sind endlich und die Momenten-Bedingung des Metatheorems gilt.

$\Rightarrow$ Somit bleiben noch folgende Voraussetzungen übrig:

- f.s. Stetigkeit von $f(t)$, $g(t)$ und $\nabla f(t)$
- Gültigkeit des Stetigkeitsmoduls (Vor. 7 des Metatheorem)

Stetigkeitsvoraussetzung

Beachte: Falls ∇f f.s. stetig ist $\Rightarrow$ f ist f.s. stetig
d.h.: bleibt nur noch die f.s. Stetigkeit von ∇f und g zu zeigen.

Es gilt:
∇f und g sind f.s. stetig, falls

$$\max_{i,j} |C^i_{f_j}(t,t) + C^i_{f_j}(s,s) - 2C^i_{f_j}(s,t)| \leq K|\ln|t-s||^{-(1+\alpha)}$$
$$\max_{i} |C^i_{g}(t,t) + C^i_{g}(s,s) - 2C^i_{g}(s,t)| \leq K|\ln|t-s||^{-(1+\alpha)}$$

für ein endliches $K > 0$, $\alpha > 0$ und $\forall$ $|t-s|$ klein genug,wobei

$C^i_g(s,t)$ die Kovarianzfunktion von g^i bezeichnet
und
$C^i_{f_j}(s,t) = \partial^2 C^i_f / \partial s_j \partial t_j$ die Kovarianzfunktion von $f^i_j = \partial f^i / \partial t_j$.

Stetigkeitsmodul

Mit Hilfe der vorangegangenen Stetigkeitsbedingungen und der Borell-TIS Ungleichung kann die Gültigkeit des Stetigkeitsmodul gezeigt werden, also:

$$\mathbb{P}(\omega(\eta) > \varepsilon) = o(\eta^N),$$

falls $\eta \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Beweisskizze(Metatheorem)

Der Beweis lässt sich auf verschiedene einzelne Abschnitte aufteilen:

- Theorem 1 liefert uns eine Integraldarstellung der N_u, welche besser geeignet ist um $\mathbb{E}(N_u)$ auszurechnen.
- Theorem 2 liefert uns eine obere Schranke von $\mathbb{E}(N_u)$.
- Man kann zeigen, dass eine untere Schranke existiert, welche mit der oberen Schranke übereinstimmt.
- Desweiteren kann man zeigen, dass die zusätzlichen Vor. der vorigen Theoreme aus den Vor. des Metatheorems folgen.

Theorem 1

Seien $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ **deterministisch**, $T \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, $B \subset \mathbb{R}^K$ offen.
Falls gilt:

1. Die Komponenten von $f, \nabla f$ und g sind alle stetig.
2. $\nexists\, t \in T$: $f(t) = u$ und $g(t) \in \partial B$
   und
   $\nexists\, t \in T$: $f(t) = u$ und $\det \nabla f(t) = 0$
3. $\nexists\, t \in \partial T$: $f(t) = u$

Dann gilt:

$$N_u(f, g : T, B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_T \delta_\varepsilon(f(t) - u) \mathbf{1}_{g(t) \in B} |\det \nabla f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Beweisidee:

- o.B.d.A. sei $u = 0$, d.h. betrachten $t \in T$ mit $f(t) = 0$
- Es existieren nur endlich viele solche t (wegen 2).
- Keines liegt auf ∂T (wegen 3).

$\Rightarrow$ Um jedes t kann man eine offene Kugel K_η mit Radius η legen, so dass die Kugeln sich weder überlappen noch den Rand ∂T berühren.

- Wähle η so klein, dass für jedes t des Kreises $g(t)$ entweder in B liegt oder im Inneren des Komplementes. (wegen 2)

Beweisidee(Fortsetzung):

Sei K_ε die Kugel im Bild von f mit $|f| < \varepsilon$.

- Wähle ε so klein, dass das Urbild von K_ε in der Vereinigung der K_η liegt.
- Da $\det \nabla f(t) \neq 0$ (wegen 2) können wir den Satz über die Umkehrabbildung anwenden und η und ε klein genug wählen, so dass K_ε für jede K_η im Bild von f enthalten ist, so dass die Restriktion von f zu solch einer Kugel bijektiv ist.
- Da die Funktionaldeterminate dieser Abbildungen $|\det \nabla f(t)|$ ist, können wir ε so klein wählen, dass

$$N_0 = \int_T \delta_\varepsilon(f(t)) \mathbb{1}_{g(t) \in B} |\det \nabla f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

- Da N_0 unabhängig von ε ist, können wir auf beiden Seiten $\varepsilon \to 0$ gehen lassen.

Theorem 2

Seien $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ aber diesmal **zufällig**,
$T \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, $B \subset \mathbb{R}^K$ offen.
Falls die Voraussetzungen von Theorem 1 erfüllt sind und zusätzlich Vor. (2)-(7) des Metatheorems, dann gilt:

$$\mathbb{E}(N_u(f,g : T,B)) \leq \int_T \int_B \int_{\mathbb{R}^{N^2}} |\det \nabla f(t)| p_t(u, \nabla y, v) \, \mathrm{d}\nabla y \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t$$

Beweis

o.B.d.A. sei $u = 0$
$\forall \varepsilon > 0$ sei

$$N^\varepsilon := \int_T \delta_\varepsilon(f(t)) \mathbb{1}_{g(t) \in B} |\det \nabla f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Wenn wir $\det \nabla f(t)$ als Produkt schreiben und beachten, dass:

- $\mathbb{E}(|X_1 \ldots X_n|) \leq \prod_{i=1}^{n} [\mathbb{E}(|X_i|^n)]^{1/n}$ gilt
- $\sup_{t \in T} \max_{1 \leq i,j \leq N} \mathbb{E}\left\{ \left| f_j^i(t) \right|^N \right\} < \infty$ gilt (Momenten-Bedingung)

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(|\det \nabla f(t)|) < \infty$

Beweis(Fortsetzung)

Somit können wir Fubini (F) anwenden:

$$\mathbb{E}(N^{\varepsilon}) = \int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2} \times B} \left(\int\limits_T \delta_\varepsilon(x) |\det \nabla y| p_t(x, \nabla y, v)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\nabla y\, \mathrm{d}v$$

$$\overset{(F)}{=} \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N^2} \times B} \delta_\varepsilon(x) |\det \nabla y| p_t(x, \nabla y, v)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\nabla y\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^{N^2} \times B} |\det \nabla y| p_t(\nabla y, v) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(x) p_t(x | \nabla y, v)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\nabla y\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}t$$

Beweis(Fortsetzung)

Um den Satz von Lebesgue (L) anwenden zu können, benötigen wir noch 2 Voraussetzungen:

- Da alle Wkt.dichten nach Voraussetzung beschränkt & stetig sind, gilt:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(x) p_t(x|\nabla y, v)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\int_{\mathbb{R}^N} \delta(y-u) g(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(y-u) g(y)\,\mathrm{d}y}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \delta(x) p_t(x|\nabla y, v)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\int_{\mathbb{R}^N} \delta(y-u) g(y)\,\mathrm{d}y = g(u)}{=} p_t(0|\nabla y, v)
\end{aligned}
$$

Beweis(Fortsetzung)

- Außerdem gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(x) p_t(x|\nabla y, v)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(x) \sup_x p_t(x|\nabla y, v)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sup_x p_t(x|\nabla y, v) \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sup_x p_t(x|\nabla y, v) < \infty$$

Beweis(Fortsetzung)

$$\mathbb{E}(N_0) = \mathbb{E}(\lim_{\varepsilon\to 0} N^\varepsilon) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}(N^\varepsilon) = \ldots$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_T \int_{\mathbb{R}^{N^2}\times B} |\det \nabla y| p_t(\nabla y, v) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(x) p_t(x|\nabla y, v)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\nabla y\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{(L)}{=} \int_T \int_{\mathbb{R}^{N^2}\times B} |\det \nabla y| p_t(\nabla y, v) \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(x) p_t(x|\nabla y, v)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\nabla y\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_T \int_{\mathbb{R}^{N^2}\times B} |\det \nabla y| p_t(0, \nabla y, v)\,\mathrm{d}\nabla y\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$

Motivation

Für die Berechnung der Eulercharakteristik von Exkursionsmengen hilft es zu wissen, wann f **geeignet regulär** ist.

Umgebung

- Im folgenden sei T ein beschr. Rechteck (im $\mathbb{R}^N$) d.h.

$$T = [s, t] = \prod_{i=1}^{N} [s_i, t_i], \quad -\infty < s_i < t_i < \infty$$

Definition

- *k-Facette*
  Eine k-Facette J ist definiert durch eine feste Teilmenge $\sigma(J)$ von $\{1,...,N\}$ mit $|\sigma(J)| = k$ und einer Menge $\varepsilon(J) = \{\varepsilon_j, j \notin \sigma(J)\}$ mit $|\varepsilon(J)| = N - k$, wobei $\varepsilon_j \in \{0,1\}$,
  so dass

$$J = \{v \in T : v = (v_1,...,v_N)\},$$

wobei

$$v_j = \begin{cases} (1-\varepsilon_j)s_j + \varepsilon_j t_j & \text{, falls } j \notin \sigma(J) \\ s_j < v_j < t_j & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Definition

- *k-dimensionaler Rand*
  Der k-dimensionaler Rand $\partial_k T$ ist definiert als die Vereinigung der k-Facetten J in T.

  $\Rightarrow \partial_k T$ setzt sich aus $2^{N-k}\binom{N}{k}$ Elementen zusammen.

  $\partial_N T = T^\circ$, während $\partial_0 T$ nur aus den 2^N Eckpunkten des Rechtecks besteht.

Definition

- **kritischer Punkt**
  Ein kritischer Punkt ist ein $t \in T$, für das gilt $\nabla f(t) = 0$.

- **nicht-ausgearteter, kritischer Punkt**
  Ein kritischer Punkt $t \in T$ heißt nicht-ausgeartet, falls $\det \nabla^2 f(t) \neq 0$.

Definition

- **Geeignete Regularität**
  Sei T ein beschränktes Rechteck in $\mathbb{R}^N$ und f eine reellwertige Funktion definiert auf einer offenen Umgebung von T.
  f heißt **geeignet regulär** bzgl. T zum Niveau u, falls für ein festes $u \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen für jede Facette J von T, für welche $N \in \sigma(J)$, gelten:

  1. $f \in C^2$ auf einer offenen Umgebung von T.
  2. $f_{|J}$ hat keine kritischen Punkte zum Niveau u.
  3. $\nexists t \in J : 0 = f(t) - u = \det D_J(t) = f_j(t) \forall j \in \sigma(J) \setminus \{N\}$, wobei $J \in \partial_k T$ und falls $D_J(t)$ die symmetrische $(k-1) \times (k-1)$ Matrix mit den Elementen $f_{ij}, i, j \in \sigma(J) \setminus \{N\}$ bezeichnet.

Theorem 3

Sei T ein beschränktes Rechteck in $\mathbb{R}^N$ und f ein reellwertiges Zufallsfeld definiert auf einer offenen Umgebung von $T \subset \mathbb{R}^N$.
Dann ist f, mit Wkt. 1, **geeignet regulär** bzgl. T, falls die folgenden Voraussetzungen für jede Facette J von T erfüllt sind:

1. $f \in C^2$ auf einer offenen Umgebung von T.
2. $\forall t \in J$ sind die Randdichten $p_t(x)$ von $\nabla f_{|J}(t)$ glm. stetig in 0.
3. die bedingten Wktn. $p_t(z|x)$ von $\det \nabla^2 f_{|J}(t)$ unter $\nabla f_{|J}(t) = x$ sind glm. stetig für (z,x) in einer Umgebung von 0.

Literatur

R. Adler und J. Taylor
Random Fields And Geometry
Springer, Berlin, 2007

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !!!