Exkursionsmengen und ihre Eulercharakteristik

Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen - Zufallsfelder

Moritz Göbel, David Neuhäuser

Institut für Stochastik

02. Dezember 2008

Inhalt

Inhalt

Einführung

Veranschaulichung

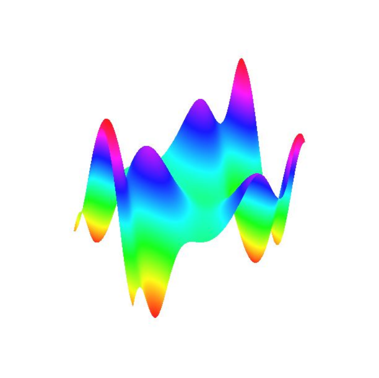

Abbildung: ein beliebiges “Gebirge”

Einführung

Veranschaulichung

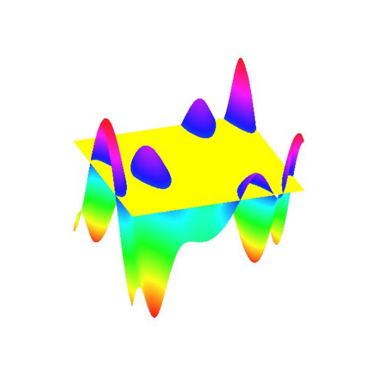

Abbildung: Mit Level u

Einführung

Veranschaulichung

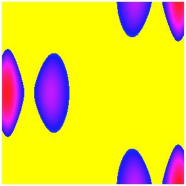

Abbildung: aus der Draufsicht

Einführung

Ziel

Ziel soll es sein, der Menge, die über ein bestimmtes Niveau u herrausragt ("Exkursionsmenge") eine Kennzahl zuzuordnen, die sogenannte "Eulercharakteristik".

Einführung

Motivation

Die Zahl kann zum Beispiel angeben, wieviele Bereiche des Gehirns durch bestimmte Reize stimuliert werden.

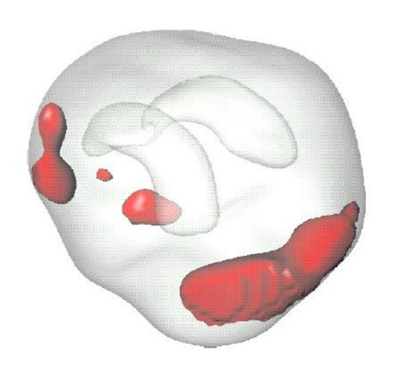

Abbildung: Ein stimuliertes Gehirn

Inhalt

Grundlegende Definitionen

Konventionen

- Einschränkung auf deterministische Mengen. Theorie aber auf zufällige Mengen übertragbar.
- Als Grundmengen lediglich “schöne” Teilmengen des $\mathbb{R}^N$. Konkret achsenparalelle Quader.

Grundlegende Definitionen

Definition (k-dimensionale Ebene)

Sei J eine Teilmenge von $\{1, \ldots, N\}$ die $N - k$ Elemente enthält und $a_j, j \in J$ konstant, so nennen wir die k-dimensionale affine Teilmenge

$$E = \{t \in \mathbb{R}^N : t_j = a_j \; \forall j \in J \; und \; -\infty < t_j < \infty \; \forall j \notin J\}$$

(achsenparallele) k-dimensionale Ebene in $\mathbb{R}^N$.

Konvention

Im Folgenden werden stets solche Ebenen betrachtet.

Grundlegende Definitionen

Definition (Elementarmenge)

Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^N$ nennen wir *Elementarmenge* ,falls die Menge $E \cap B$ einfach zusammenhängend ist für alle k-dimensionalen Ebenen E aus $\mathbb{R}^N$ für alle $k = 1, \dots, N$.

Grundlegende Definitionen

Definition (elementarer Komplex)

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ heißt *elementarer Komplex*, falls

- sie als endliche Vereinigung von *Elementarmengen* $B_1, \ldots, B_m$ dargestellt werden kann
- $B_{\nu_1} \cap \cdots \cap B_{\nu_k}$ für jede Kombination der Indize $\nu_1 \ldots \nu_k,\ k = 1, \ldots, m$ eine *Elementarmenge* ist.

Dabei nennen wir $p(A) := \{B_1, \ldots, B_m\}$ eine Partition von A und m die Ordnung der Partition.

Grundlegende Definitionen

Elementarer Komplex

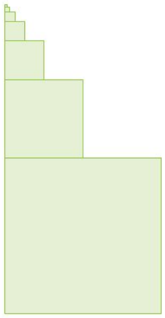

Abbildung: Beispiel

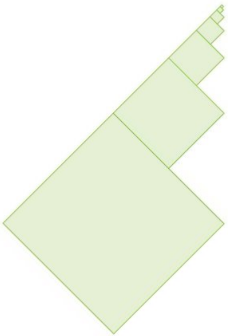

Abbildung: Gegenbeispiel

Inhalt

Eulercharakteristik

Ansatz

Um diesen *elementaren Komplexen* eine Kennzahl zuzuordnen, suchen wir nach einem ganzzahligen Funktional, das folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset, \\ 1 & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ Elementarmenge ist.} \end{cases}$$

und

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B)$$

wobei $A,\ B,\ A \cup B$ und $A \cap B$ elementare Komplexe sein sollen.

Eulercharakteristik

Bezeichnungen

- Bezeichne $\mathbb{1}$ die Indikatorfunktion für Elementarmengen, definiert durch $\mathbb{1}(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset, \\ 1 & \text{falls } A \neq \emptyset \text{ Elementarmenge ist.} \end{cases}$
- Bezeichne $\sum^{(n)}$ die Summe über sämtliche Teilmengen $\{j_1, \ldots, j_n\}$ von $\{1, \ldots, m\}$,$1 \leq n \leq m$

Eulercharakteristik

Definition (Charakteristik einer Partition)

Sei $p = p(A)$ eine Partition der Ordnung m eines elementaren Komplexes A. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}\kappa(A, p) = \sum^{(1)} \mathbb{1}(B_j) - \sum^{(2)} \mathbb{1}(B_{j_1} \cap B_{j_2}) + \dots \\ + (-1)^{n+1} \sum^{(n)} \mathbb{1}(B_{j_1} \cap \dots \cap B_{j_n}) + \dots \\ + (-1)^{m+1} \mathbb{1}(B_1 \cap \dots \cap B_m)\end{aligned}$$

als Charakteristik einer Partition.

Eulercharakteristik

Theorem

Sei A ein *elementarer Komplex* und $p = p(A)$ eine Partition von A. Dann ist $\kappa(A, p)$ unabhängig von p. Wir bezeichnen es daher mit $\varphi(A)$ und nennen dies die *Eulercharakteristik* von A.

Eulercharakteristik

Theorem

Für einen *elementaren Komplex A* hat dessen Eulercharakteristik φ folgende äquivalente Darstellung:

$$\varphi(A) = \begin{cases} \text{Anzahl disjunkter Intervalle in } A & \text{falls } N = 1 \\ \sum_x \{\varphi(A \cap E_x) - \varphi(A \cap E_{x^-}) & \text{falls } N > 1 \end{cases}$$

wobei

$$\varphi(A \cap E_{x^-}) = \lim_{y \downarrow 0} \varphi(A \cap E_{x-y})$$

und über alle x summiert wird, für die die Summation ungleich null ist.

Beweis

$\rightarrow$ Tafel

Eulercharakteristik

Homotopie

Man kann zeigen, dass homotop äquivalente Mengen dieselbe Eulercharakteristik haben.

Inhalt

Exkursionsmengen

Definition (Exkursionsmenge)

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und $T \subset \mathbb{R}^N$, definieren wir für jedes $u \in \mathbb{R}$

$$A_u \equiv A_u(f, T) := \{t \in T : f(t) \geq u\}$$

als *Exkursionsmenge* von f in T zum Niveau u.

Exkursionsmengen

Einführung

- Suche nach direkter Formel für $\varphi(A_u(f, T))$
- T soll wie anfangs erwähnt, ein beschränktes N-dimensionales Rechteck mit den Ecken s_i und r_i sein. $-\infty < s_i < r_i < \infty$, $i = 1, \ldots, N$

Exkursionsmengen

Definition (k-Facette)

- Sei $\sigma(J)$ eine feste Teilmenge aus $\{1, \dots, N\}$ der Größe k
- und ϵ_j habe jeweils den Wert Null oder Eins.
- Dann heißt die Menge J *Facette* der Dimension k, falls gilt:

$$J = \left\{ v \in T : \begin{array}{ll} v_j = (1 - \epsilon_j)s_j + \epsilon_j r_j, & \text{für } j \notin \sigma(J) \\ s_j < v_j < r_j, & \text{für } j \in \sigma(J) \end{array} \right\}$$

Weiter bezeichne $\partial_k T$ die Menge der Facetten von T mit Dimension k.

Exkursionsmengen

Definition (geeignet regulär)

Sei T ein beschränktes Rechteck in $\mathbb{R}^N$ und die Funktion f reellwertig und auf einer offenen Umgebung von T definiert.
Falls dann für festes $u \in \mathbb{R}$ die folgenden drei Bedingungen für jede Facette J von T für das $N \in \sigma(J)$ erfüllt sind, nennen wir f geeignet regulär bzgl. T zum Niveau u.

- f hat stetige partielle Ableitungen bis einschließlich zweiter Ordnung in einer offen Umgebung von T.
- $f_{|J}$ hat keine kritischen Punkte zum Niveau u
- Falls $J \in \partial_k T$ und $D_J(t)$ bezeichne die symmetrische $(k-1) \times (k-1)$ Matrix mit den Elementen $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f(t), i, j \in \sigma(J) \backslash \{N\}$, so gibt es kein $t \in J$ für das $0 = f(t) - u = \det D_J(t) = \frac{\partial}{\partial t_j} f(t)$ für alle $j \in \sigma(J) \backslash \{N\}$ gilt

Exkursionsmengen

Theorem

Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$ geeignet regulär bezüglich eines beschränkten Rechtecks T zum Level u. Dann ist die Exkursionsmenge $A_u(f, T)$ ein elementarer Komplex.

Exkursionsmengen

Lemma

Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$ geeignet regulär bezüglich eines beschränkten Rechtecks T zum Level u. Dann gibt es nur endlich viele t für die gilt:

$$f(t) - u = \frac{\partial}{\partial t_1} f(t) = \frac{\partial}{\partial t_2} f(t) = \cdots = \frac{\partial}{\partial t_{N-1}} f(t) = 0$$

Exkursionsmengen

Erinnerung (Satz über implizite Funktionen)

- Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen,
- $g = (g^1, \ldots, g^N) : U \to \mathbb{R}^N$ einmal stetig partiell differenzierbar
- und die Determinante der Matrix $(\partial g^i / \partial t_j)$ ist ungleich Null für ein $t \in U$

So ist g in einer offen Umgebung von t invertierbar.

Exkursionsmengen

Konvention

Im folgenden werden wir stets vorraussetzen, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ und geeignet regulär ist.

Ansatz

Wir unterscheiden:

- Punkte im Inneren von T
- Punkte auf dem Rand von T

Exkursionsmengen

Herleitung für Punkte im Inneren

- Wenn E_x tangential zu ∂A_u muss offensichtlich $\frac{\partial}{\partial t_1} f(t) = 0$ gelten.
- Weil die Grenzwertbildung in der vorangegangen Formel von unten her erfolgte, muss zusätzlich $\frac{\partial}{\partial t_2} f(t) > 0$ gelten.
- Punkte, die dies erfüllen werden, falls $\frac{\partial^2}{\partial^2 t_1} f(t) < 0$ als $+1$ und falls > 0, als -1 gewertet.

Exkursionsmengen

Eine Funktion

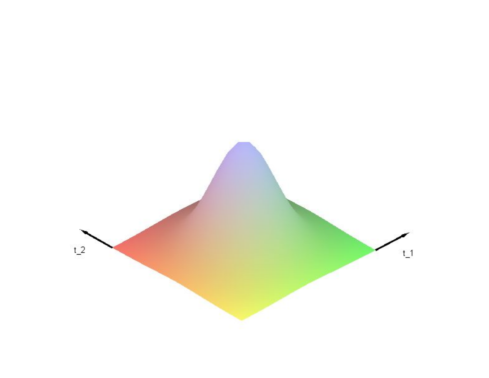

Abbildung: Glockenkurve

Exkursionsmengen

Exkursionsmenge

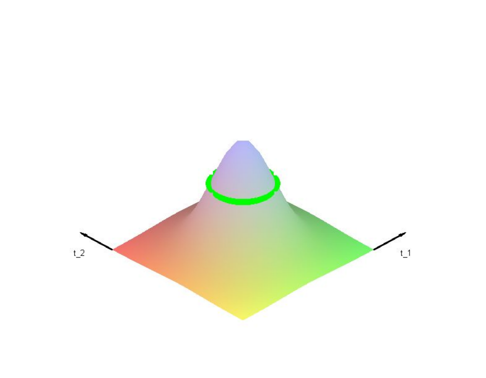

Abbildung: Exkursionsmenge der Glockenkurve

Exkursionsmengen

Tangentialpunkte in t_1 Richtung

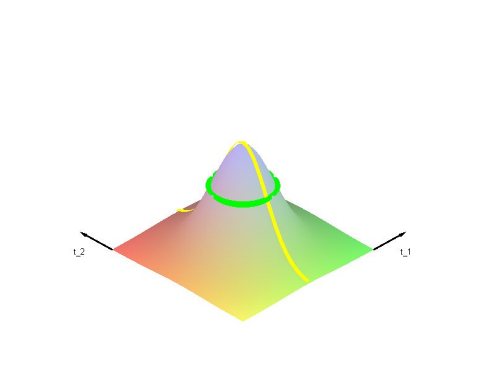

Abbildung: Ableitung in t_1-Richtung gleich Null

Exkursionsmengen

Ableitung in t_2 Richtung

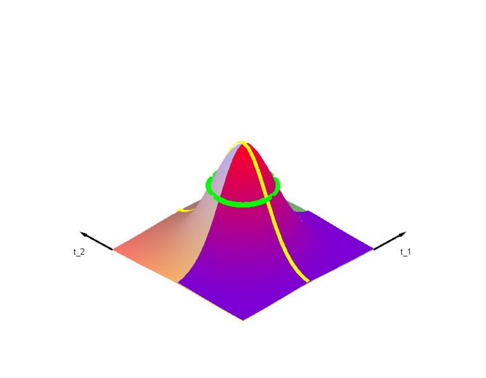

Abbildung: Ableitung in t_2-Richtung positiv?

Exkursionsmengen

2. Ableitung in t_1 Richtung

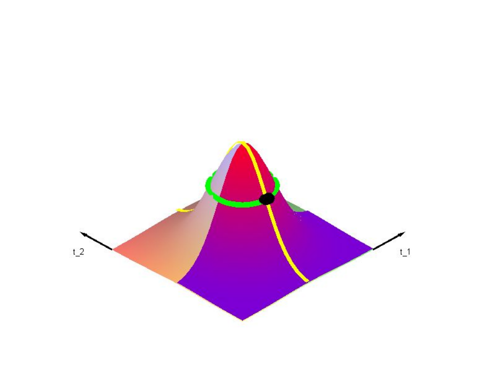

Abbildung: 2. Ableitung in t_1-Richtung positiv oder negativ?

Exkursionsmengen

2. Ableitung in t_1 Richtung

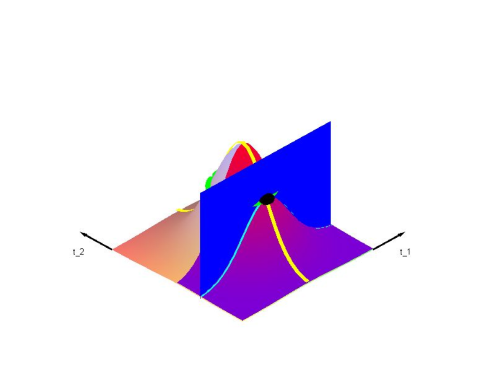

Abbildung: Hochpunkt, d.h. 2. Ableitung in t_1-Richtung negativ

Exkursionsmengen

Umgekehrter Fall

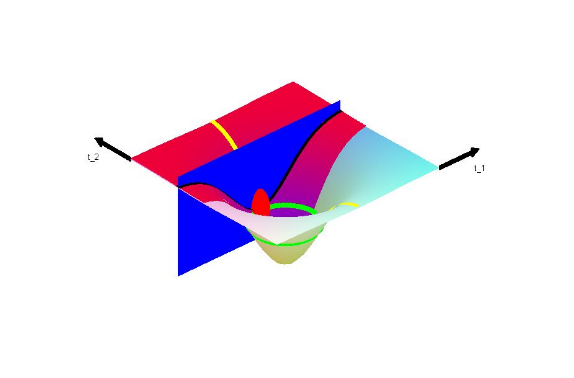

Abbildung: Tiefpunkt, d.h. 2. Ableitung in t_1-Richtung positiv

Exkursionsmengen

Herleitung für Punkte auf dem Rand

Teile der Exkursionsmenge, die auf dem Rand liegen, werden jeweils als $+1$ gewertet, falls einer der folgenden Punkte zutrifft.

$$\begin{cases} t = (\cdot, s_2),\ f(t) = u,\ \frac{\partial}{\partial t_1} f(t) < 0 \\ t = (s_1, \cdot),\ f(t) = u,\ \frac{\partial}{\partial t_2} f(t) > 0,\ \frac{\partial}{\partial t_1} f(t) < 0 \\ t = (r_1, \cdot),\ f(t) = u,\ \frac{\partial}{\partial t_2} f(t) > 0,\ \frac{\partial}{\partial t_1} f(t) > 0 \\ t = (r_1, s_2),\ f(t) > u \end{cases}$$

Exkursionsmengen

Theorem

Sei f geeignet regulär bezüglich einem Rechteck T und Level u. So ist die Euler Charakteristik ihrer Exkursionsmenge $A_u(f, T)$ gegeben als die Anzahl der Punkte t im Inneren von T, die

$$f(t) = u,\ \frac{\partial}{\partial t_1} f(t) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t_2} f(t) > 0,\ \frac{\partial^2}{\partial^2 t_1} f(t) < 0$$

erfüllen, minus die Punkte die

$$f(t) = u,\ \frac{\partial}{\partial t_1} f(t) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t_2} f(t) > 0,\ \frac{\partial^2}{\partial^2 t_1} f(t) > 0$$

erfüllen, plus die Punkte auf dem Rand von T, die eine der entsprechenden 4 Bedinungen erfüllen.

Literatur

R. Adler und J. Taylor
Random Fields And Geometry
Springer, Berlin, 2007