Spezifische innere Volumina

Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen - Zufallsfelder

Regina Poltnigg und Henrik Haßfeld

Universität Ulm

13. Januar 2009

1. Eulercharakteristik
2. Berechnung von $\mathbb{E}(\varphi(A_u(f, T)))$
3. Anwendung

Elementarmengen

Definition

Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ heißt **Elementarmenge**, falls B kompakt und $B \cap E$ einfach zusammenhängend ist für jede k-dimensionale achsenparallele Ebene E, k=1,...,d.

Bemerkung

Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Elementarmenge.
C konvex und kompakt $\Rightarrow$ C Elementarmenge

Definition

$A \subset \mathbb{R}^d$ ist ein **elementarer Komplex**, falls $A = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ und $B_{\nu_1} \cap ... \cap B_{\nu_k}$ Elementarmengen sind $\forall\ \nu_1, \ldots, \nu_k,\ \ k = 1, ..., m$.

Eulercharakteristik

Berechnungsmöglichkeit

A elementarer Komplex

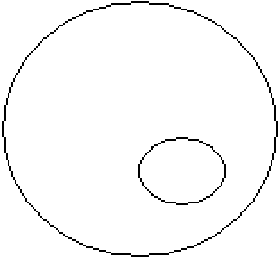
$$\Rightarrow \varphi(A) = \begin{cases} \# \text{ disjunkte Intervalle} & , d = 1 \\ \sum_x (\varphi(A \cap E_x) - \varphi(A \cap E_{x^-})) & , d > 1 \end{cases}$$

wobei $\varphi(A \cap E_{x^-}) = \lim_{y \downarrow 0} \varphi(A \cap E_{x-y})$,

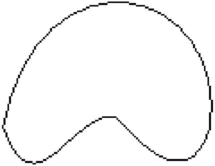
$E_x = E_x(j) = \{t \in \mathbb{R}^d : t_j = x\}$, und es wird über diejenigen $x \in \mathbb{R}$ summiert, für die der Summand nicht Null ist.

Beispiele

- Interpretation:
  $d = 2$: $\varphi(A) = \#$ zusammenhängender Komponenten
  - $\#$ Löcher
  $d = 3$: $\varphi(A) = \#$ Komponenten $+ \#$ Löcher - $\#$ Tunnel
- Beispiel: $(d = 2)$



(a) $\varphi(A) = 0$



(b) $\varphi(A) = 1$

k-Facette

Sei $T = [0, T_1]$ x...x $[0, T_d] \subset \mathbb{R}^d$ mit $T_i > 0$.

Definition

Eine Menge $J \subset \mathbb{R}^d$ heißt **Facette der Dimension** k, falls gilt:

$$J = \left\{ t \in \mathbb{R}^d : \begin{cases} t_j = \epsilon_j T_j & , j \notin \sigma(J) \\ 0 \leq t_j \leq T_j & , j \in \sigma(J) \end{cases} \right\},$$

wobei $\sigma(J) \subset \{1, ..., d\}$ mit $|\sigma(J)| = k$ und $\{\epsilon_j, j \notin \sigma(J)\}$ eine Folge von Nullen und Einsen ist.
Ferner bezeichne $\mathcal{J}_k$ die Menge der Facetten von T mit Dimension k und $\mathcal{O}_k$ die Menge der Facetten mit Dimension k, die den Ursprung enthalten.
Es gilt: $|\mathcal{J}_k| = 2^{d-k}\binom{d}{k}$ und $|\mathcal{O}_k| = \binom{d}{k}$

geeignet regulär

Definition

Sei f eine reellwertige Funktion und auf einer offenen Umgebung von T definiert.
f heißt **geeignet regulär** bzgl. T zum Niveau u, falls für ein festes $u \in \mathbb{R}$ die folgenden drei Bedingungen für jede Facette J von T, für die $d \in \sigma(J)$ ist, gelten:

- f hat stetige partielle Ableitungen bis einschließlich zweiter Ordnung in einer offenen Umgebung von T
- $f_{|J}$ hat keine kritischen Punkte zum Niveau u
- Es gibt kein $t \in J$, für das $0 = f(t) - u = \det D_J(t) = \frac{\partial}{\partial t_j} f(t)$ $\forall j \in \sigma(J) \backslash \{d\}$ gilt, falls $J \in \mathcal{J}_k$ und $D_J(t)$ bezeichne die symmetrische $(k-1) \times (k-1)$ Matrix mit den Elementen $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f(t)$, $i, j \in \sigma(J) \backslash \{d\}$.

geeignet regulär

Theorem

Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ geeignet regulär bezüglich eines beschränkten Quaders T zum Level u. Dann ist die Exkursionsmenge $A_u(f,T) = \{t \in T : f(t) \geq u\}$ ein elementarer Komplex.

Eulercharakteristik

Sei f ein reellwertiger Gauß-Prozess. Ist f fast sicher geeignet regulär, dann gilt für die Eulercharakteristik von $A_u(f, T)$:

$$\varphi(A_u(f, T)) = \sum_{k=0}^{d} \sum_{J \in \mathcal{J}_k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \mu_i(J) \, ,$$

wobei

$\mathcal{J}_k$:= Menge der k-dimensionalen Facetten in T

$$\begin{aligned} \mu_i(J) = \#\{t \in J : \; & f(t) \geq u, \\ & f_j(t) = 0, j \in \sigma(J), \\ & \epsilon_j^* f_j(t) \geq 0, j \notin \sigma(J), \\ & \mathrm{index}(f_{mn}(t))_{m,n \in \sigma(J)} = k - i\} \end{aligned}$$

ϵ_j^*: Folge von $+$ und - Einsen

Voraussetzungen für f

- Sei f ein zentrierter, stationärer Gauß-Prozess über T, d.h.
  - $\mathbb{E}(f(t)) = 0 \ \forall \ t \in T$
  - für die Kovarianzfunktion $C : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gilt:
    $C(s, t) = C(s - t)$ und
    $\mathbb{E}(f^2(t)) = \sigma^2 = C(0)$ (konstante Varianz)
- Die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung mögen fast sicher existieren.
  Wir schreiben $f_i(t) = \frac{\partial}{\partial t_i} f(t)$, $f_{ij}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} f(t)$ und bezeichnen die Hesse-Matrix mit $\nabla^2 f$.

Voraussetzungen für f

- Die gemeinsame Verteilung von $(f_i(t), f_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,d}$ sei nicht degeneriert und für ein $\alpha > 0$ und ein $K \geq 0$ gelte

$$\max_{i,j} \left| C_{f_{ij}}(t,t) + C_{f_{ij}}(s,s) - 2C_{f_{ij}}(s,t) \right| \leq K \left| \ln |t-s| \right|^{-(1-\alpha)}$$

$\forall\ s,\ t \in T$ mit $s \neq t$.

Bemerkung

Aus diesen Voraussetzungen folgt, dass f fast sicher geeignet regulär ist.

Hermite Polynome

Definition

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^j \, x^{n-2j}}{j! \, (n-2j)! \, 2^j}, n \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

- iterative Darstellung: $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$
- Beispiel: $H_0(x) \equiv 1$
  $H_1(x) = x$
  $H_2(x) = x^2 - 1$
  $H_3(x) = x^3 - 3x$

Bezeichnungen

- $\lambda_{ij} := \mathbb{E}(f_i(t) f_j(t))$,
  $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$,
  $\Lambda_J = (\lambda_{ij})_{i,j\in\sigma(J)}$, $k \times k$ Matrix
- Der Index einer Matrix ist die Anzahl ihrer negativen Eigenwerte.

Lemma

Sei $T = [0, T_1]$ x...x $[0, T_d] \subset \mathbb{R}^d$ mit $T_i > 0$ und sei $u \in \mathbb{R}$. Für f gelten obige Voraussetzungen. Sei

$$\mu_k := \#\{t \in T : f(t) \geq u, \nabla f(t) = 0, \mathrm{index}(\nabla^2 f) = k\}$$

Dann gilt für $d \geq 1$:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{d}(-1)^k \mu_k\right) = \frac{(-1)^d \, |T| \, |\Lambda|^{1/2}}{(2\pi)^{(d+1)/2} \, \sigma^d} H_{d-1}\left(\frac{u}{\sigma}\right) e^{-u^2/2\sigma^2}$$

Theorem

Für f und T sollen obige Voraussetzungen gelten. Für $u \in \mathbb{R}$ sei $A_u = A_u(f,T) = \{t \in T : f(t) \geq u\}$ die Exkursionsmenge zum Level u und φ bezeichne die Eulercharakteristik. Dann gilt:

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(A_u\right)\right) = e^{-u^2/2\sigma^2} \sum_{k=1}^{d} \sum_{J \in \mathcal{O}_k} \frac{|J|\,|\Lambda_J|^{1/2}}{(2\pi)^{(k+1)/2}\,\sigma^k} H_{k-1}\left(\frac{u}{\sigma}\right) + \\ + \left(1 - \Phi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Für das k-dimensionale Volumen $|J|$ von $J \in \mathcal{J}_k$ gilt: $|J| = \prod_{i \in \sigma(J)} T_i$.

Korollar

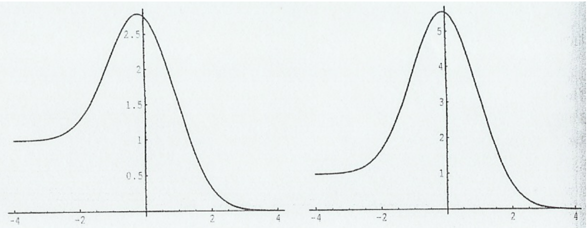
- Seien die Voraussetzungen des Theorems gegeben. Außerdem sei f isotrop, d.h. $C(t) = C(|t|)$
- $T = [0, \tau]^d$ und $\lambda_2 := \mathbb{E}(f_i^2(t)) = Var(f_i(t))$
- Dann gilt:

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(A_u\right)\right) = e^{-u^2/2\sigma^2} \sum_{k=1}^{d} \frac{\binom{d}{k}\tau^k \lambda_2^{k/2}}{(2\pi)^{(k+1)/2}\,\sigma^k} H_{k-1}\left(\frac{u}{\sigma}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right)$$

Beispiel 1

$d = 1$: $T = [0, \tau]$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\varphi\left(A_u\left(f, [0,\tau]\right)\right)\right) = \left(1 - \Phi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right) + \frac{\tau \lambda_2^{1/2}}{2\pi\sigma} e^{-u^2/2\sigma^2}$$



$\sigma^2 = 1,\ \lambda_2 = 200$ $\qquad$ $\sigma^2 = 1,\ \lambda_2 = 1000$

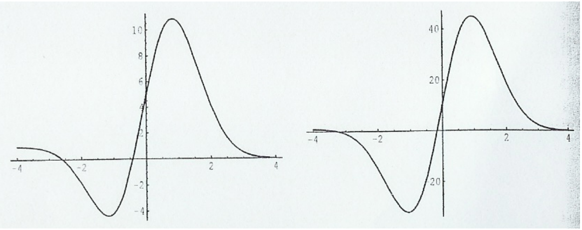
Bemerkung

Falls f stationär und isotrop ist, ergibt sich also die Rice-Formel als Spezialfall aus obigem Korollar für $\sigma^2 = 1$.

Beispiel 2

$d = 2$: $T = [0, \tau]^2$, $\sigma^2 = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\varphi(A_u(f, [0,\tau]^2))\right) = \left[\frac{\tau^2 \lambda_2}{(2\pi)^{3/2}} u + \frac{2\tau\lambda_2^{1/2}}{2\pi}\right] e^{-u^2/2} + (1 - \Phi(u))$$



$\lambda_2 = 200$ $\lambda_2 = 1000$

Metatheorem

Falls f und g zentrierte Gauß-Prozesse über T sind, für jedes $t \in T$ die gemeinsame Verteilung von $(f(t), \nabla f(t), g(t))$ nicht degeneriert ist und wenn weitere Regularitätsbedingungen für f und g gelten, gilt:

$$\mathbb{E}(N_u) = \int_T \mathbb{E}\left(|det \nabla f(t)| \, \mathbb{I}_B(g(t)) | f(t) = u\right) p_t(u) dt \, ,$$

wobei $N_u = \# \{t \in T : f(t) = u \text{ und } g(t) \in B\}$ und p_t die Dichte von $f(t)$ ist.

Berechnung über innere Volumina

Für die inneren Volumina $V_0, V_1, \ldots, V_d$ von $T = [0, \tau]^d$ gilt:

$$V_j\left([0, \tau]^d\right) = \binom{d}{j} \tau^j.$$

Mit $\sigma^2 = \lambda_2 = 1$ ergibt sich:

$$\mathbb{E}\left(\varphi(A_u(f, T))\right) = \sum_{k=0}^{d} V_k(T) \rho_k\left(u\right),$$

wobei

$$\rho_k\left(u\right) = \left(2\pi\right)^{-(k+1)/2} H_{k-1}\left(u\right) e^{-u^2/2} \text{ für k} \geq 0,$$

$$H_{-1}\left(u\right) = \sqrt{2\pi} e^{\frac{u^2}{2}} \left(1 - \Phi\left(u\right)\right), u \in \mathbb{R}.$$

Erwartungswert innerer Volumina

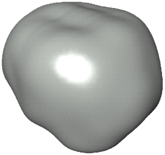
- Bisher haben wir nur den Erwartungswert der Eulercharakteristik betrachtet.
- Die Eulercharakteristik ist nur eines der $d+1$ inneren Volumina $V_0, \dots, V_d$.
- Allgemein gilt für V_j:

$$\mathbb{E}\left(V_j\left(A_u\left(f,T\right)\right)\right) = \sum_{l=0}^{d-j} \begin{bmatrix} j+l \\ l \end{bmatrix} \rho_l(u) V_{j+l}(T),$$

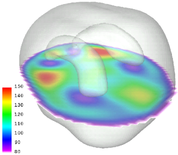
wobei $\begin{bmatrix} j+l \\ l \end{bmatrix} = \binom{j+l}{l} \dfrac{\omega_{j+l}}{\omega_j \omega_l}$ und $\omega_k = \dfrac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}$ das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel ist.

Anwendungsbeispiel

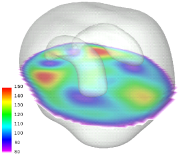
Wir wollen die Aktivität des menschlichen Gehirns während einer Leseaufgabe untersuchen. Dabei werden zwei verschiedene Phasen betrachtet: die Ruhephase und die aktive Phase. Der Blutfluss im Gehirn wird bei 10 Testpersonen gemessen.



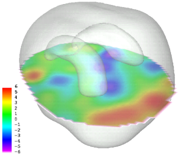
(a) Gehirn von hinten links



(b) durchschnittlicher Blutfluss in Ruhephase



(c) durchschnittlicher Blutfluss in Aktivphase



(d) Differenz aus (c) und (b)

Konstruktion eines geeigneten Tests

- Nullhypothese H_0: kein Unterschied zwischen der Ruhe- und der Aktiv-Phase ($\mu = 0$)
- Testgröße: $Z(t, x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}_n(t)}{s}$
  - x_i: Differenz der Werte von Aktiv- und Ruhephase bei Person i $\Rightarrow$ Zufallsgrößen X_i können als i.i.d angenommen werden
  - s: durchschnittliche empirische Standardabweichung über alle Messpunkte
- $\Rightarrow$ Teststatistik $Z(t)$ asymptotisch normalverteilt

Konstruktion eines geeigneten Tests

- Für jeden Messpunkt t müsste $Z(t)$ ausgewertet werden.
  $\Rightarrow$ ca. 300.000 Tests
- Wollen daher neue Testgröße $\sup_{t\in T} Z(t)$ betrachten, und suchen einen Schwellenwert $u_{0.05}$, der nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 überschritten wird.
- Zusätzliche Annahme: $\{Z(t), t \in T\}$ ist ein Gauß-Prozess
- Nullhypothese H_0: $\mathbb{E}\left(Z(t)\right) = 0 \, \forall t \in T$

Berechnung des Schwellenwertes

- $\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} Z(t) \geq u_{0.05}\right) = 0.05$
- $\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} Z(t) \geq u\right) = \mathbb{P}\left(A_u\left(Z, T\right) \neq \emptyset\right) \; \forall u \in \mathbb{R}$
- für große u gilt näherungsweise

$$\varphi(A_u(Z, T)) = \begin{cases} 1, & \text{falls } A_u(Z, T) \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\Rightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} Z(t) \geq u\right) \cong \mathbb{E}\left(\varphi(A_u(Z, T))\right)$

Berechnung des Schwellenwertes

Dann folgt aus der Formel zur Berechnung des Erwartungswertes über die inneren Volumina:

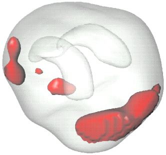
$$\left[\frac{V_3\lambda^{3/2}(u^2-1)}{(2\pi)^2}+\frac{V_2\lambda u}{(2\pi)^{3/2}}+\frac{V_1\lambda^{1/2}}{2\pi}\right]e^{-u^2/2}+V_0(1-\Phi(u))=0.05$$

wobei $\lambda = 0.0693$: Schätzer für das zweite Spektralmoment

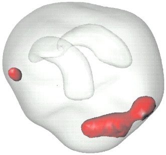
$\Rightarrow u_{0.05} = 4.22$

Auswertung

- Exkursionsmengen



(a) $u = 3.3$

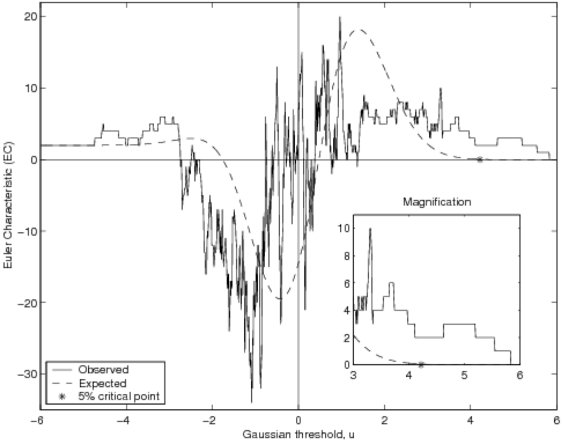


(b) $u = 4.22$

- erwartete Eulercharakteristik für $u_{0.05} = 4.22$ unter H_0 ist 0.05
- Zu beobachten sind aber zwei Regionen
  $\Rightarrow$ beobachtete Eulercharakteristik beträgt 2
- Dies sind die Regionen des Gehirns mit einer signifikanten Aktivierung:
  - die erste im primären Sehzentrum
  - die zweite in der Nähe des Sprachzentrums in der vorderen Hirnrinde

Auswertung

- Zur Überprüfung der Normalverteilungsannahme betrachten wir das Schaubild der erwarteten und beobachteten Eulercharakteristiken.



Literatur

R. Adler und J. Taylor
Random Fields And Geometry
Springer, Berlin, 2007

R. Adler, J. Taylor und K. Worsley
Applications of Random Fields and Geometry
Preprint, 2008