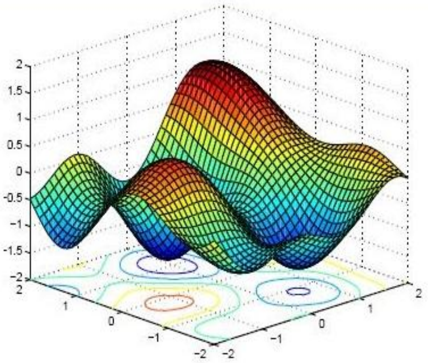
ulm university universität ulm

$$\mathbb{P}\left(\|f\| - \mathbb{E}\,\|f\| > u\right) \le e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}$$




# Die Borell-TIS-Ungleichung und ähnliche Ungleichungen

Michael Hofmann | 17. Dezember 2008

# Einführung

## Ziele des Vortrags

- Ungleichungen vorstellen, die Aussagen über Gauß-Prozesse erlauben
- Eine dieser Ungleichungen beweisen und Techniken veranschaulichen
- Mit Hilfe dieser Ungleichung Aussagen zur Stetigkeit von Gauß-Prozessen zeigen

# Inhalt

# Gauß-Prozesse

## Definition

- Wir betrachten ausschließlich reellwertige Prozesse.
- Ein stochastischer Prozess $f = \left\{ f_t : t \in T \subset \mathbb{R}^d \right\}$ heißt Gauß-Prozess,
- falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ein $\mu \in \mathbb{R}$ und ein $\sigma^2 > 0$ existieren, so dass
$$\alpha_1 f_{t_1} + \ldots + \alpha_n f_{t_n} \sim N\left(\mu, \sigma^2\right).$$

## Bemerkung

- Insbesondere ist die Zufallsvariable $f_t$ für jedes $t \in T$ normalverteilt.
- $f$ heißt zentriert, falls $\mu = \mathbb{E} f_t = 0 \ \ \forall t \in T$.

# Wiederholung Stetigkeitsmodulus

## Definition

- Sei $d(t, s)$ die kanonische Metrik auf $T$.
- Dann heißt die Funktion

$$\omega_{f,d}(\delta) := \sup_{t,s \in T: d(t,s) \leq \delta} |f_t - f_s|$$

der Steigkeitsmodulus von $f$ unter $d$.

## Bemerkung

- Für $\omega \in \Omega$ ist $f(\omega)$ gleichmäßig stetig, falls $\lim_{\delta \to 0} \omega_{f,d}(\delta) = 0$ und
- $f$ ist fast sicher gleichmäßig stetig, falls $\mathbb{P}(\lim_{\delta \to 0} \omega_{f,d}(\delta) = 0) = 1$

# Die Borell-TIS-Ungleichung

## Historisch

Die Ungleichung bewiesen 1975 sowohl

- Christer Borell als auch
- Boris Tsirelson, Ildar Ibragimov und Vladimir Sudakov auf einem ganz anderen Weg.

## Satz

- Sei $f = \{f_t : t \in T\}$ ein zentrierter Gauß-Prozess.
- Sei $f$ fast sicher beschränkt auf der Indexmenge $T$.
- Sei $\|f\| = \|f\|_T = \sup_{t \in T} f_t$.
- Sei $\sigma_T^2 := \sup_{t \in T} \mathbb{E} f_t^2 = \sup_{t \in T} \mathrm{Var} f_t$.
- Dann ist $\mathbb{E}\,\|f\| < \infty$ und für alle $u > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\|f\| - \mathbb{E}\,\|f\| > u\right) \leq e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}.$$

# Was bedeutet das?

## Bemerkung

- $f$ ist fast sicher beschränkt auf $T$: Zu fast jeder Realisierung lässt sich eine obere Schranke finden.
- $\mathbb{E}\,\|f\| < \infty$: Das Mittel dieser Schranken ist endlich.

## Bemerkung

- $\|f\| = \sup_{t\in T} f_t$ ist keine Norm.
- Mit $\{-f_t\}_{t\in T} \overset{D}{=} \{f_t\}_{t\in T}$ gilt jedoch

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} |f_t| > u\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{\sup_{t\in T} f_t > u\right\} \cup \left\{\sup_{t\in T} -f_t > u\right\}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} f_t > u\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} -f_t > u\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} f_t > u\right) \\
&= 2\mathbb{P}\left(\|f\| > u\right)
\end{aligned}
$$

# Anwendung: Stetigkeit von $f$

## Satz

- Sei $f$ fast sicher beschränkt auf $T$ und $\phi(\delta) := \mathbb{E} \sup_{d(t,s)<\delta} |f_t - f_s|$.
- Dann ist $f$ **fast sicher gleichmäßig stetig** auf $T$ genau dann, wenn

$$\lim_{\delta \to 0} \phi(\delta) = 0.$$

- Dann existiert außerdem für alle $\epsilon > 0$ eine fast sicher beschränkte Zufallsvariable $\eta > 0$, so dass

$$\omega_{f,d}(\delta) \leq \phi(\delta) \ln |\phi(\delta)|^{\epsilon} \quad \forall \delta < \eta.$$

# Anwendung: Stetigkeit von $f$

## Beweis, Notwendigkeit I

- Ist $f$ fast sicher gleichmäßig stetig auf $T$, so gilt für fast alle $\omega \in \Omega$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{d(t,s)<\delta} |f_t(\omega) - f_s(\omega)| = 0.$$

- Wir setzen $F_\delta(\omega) := \sup_{d(t,s)<\delta} |f_t(\omega) - f_s(\omega)|$.
- Also ist auch

$$\mathbb{E} \lim_{\delta \to 0} F_\delta(\omega) = \int_\Omega \lim_{\delta \to 0} F_\delta(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = 0.$$

# Anwendung: Stetigkeit von $f$

## Beweis, Notwendigkeit II

- Sei $G(\omega) := 2\sup_{t\in T}|f_t(\omega)|$.
- Es gilt $|F_\delta| \leq G$ auf $\Omega$.
- Nach der Borell-TIS-Ungleichung ist

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(\omega)d\mathbb{P}(\omega) &= 2\mathbb{E}\sup_{t\in T}|f_t(\omega)| \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}|f_t(\omega)| > u\right) du \\
&\leq 4\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} f_t(\omega) > u\right) du = 4\mathbb{E}\,\|f\| < \infty.
\end{aligned}$$

- Also können wir Grenzwert und Erwartungswert vertauschen und

$$\lim_{\delta\to 0}\phi(\delta) = \lim_{\delta\to 0}\mathbb{E}F_\delta(\omega) = \mathbb{E}\lim_{\delta\to 0}F_\delta(\omega) = 0.$$

# Anwendung: Stetigkeit von $f$

## Bemerkung

- Ist $f$ ein zentrierter Gauß-Prozess, so ist $f_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ für alle $t \in T$.
- Wir betrachten nun die Zufallsvariable

$$f_{(t,s)} := f_t - f_s \sim N(0, \sigma^2_{(t,s)}).$$

- Wegen der Faltungsstabilität der Normalverteilung ist

$$f^{(\delta)} := \left\{ f^{(\delta)}_{(t,s)} : (t,s) \in T_\delta \right\} \quad \text{mit} \quad T_\delta := \left\{ (t,s) \in T^2, d(t,s) \leq \delta \right\}$$

  ein Gauß-Prozess.
- Die Definition der kanonischen Metrik liefert $d(t,s) := \sqrt{\mathbb{E}\,(f_t - f_s)^2}$ also

$$\sup_{(t,s)\in T_\delta} d^2(t,s) = \sup_{(t,s)\in T_\delta} \mathbb{E}\,(f_t - f_s)^2 = \sup_{(t,s)\in T_\delta} \mathbb{E}(f^{(\delta)}_{(t,s)})^2 = \sigma^2_{T_\delta}.$$

# Anwendung: Stetigkeit von $f$

## Beweis, Hinlänglichkeit I

- Ist $\lim_{\delta\to 0}\phi(\delta)=0$, dann gibt es eine Folge

$$\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}\quad\text{mit}\quad\lim_{n\to\infty}\delta_n=0\quad\text{und}\quad\phi(\delta_n)\leq\frac{1}{2^n}.$$

- Wir wählen $\delta_n':=\min\left(\delta_n,\frac{1}{2^n}\right)$ und

$$A_n:=\left\{\sup_{d(t,s)<\delta_n'}|f_t-f_s|>\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right\}.$$

- Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty}A_n:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\right)=\left\{\exists\epsilon>0:\lim_{\delta\to 0}\sup_{d(t,s)<\delta}|f_t-f_s|>\epsilon\right\}.$$

# Anwendung: Stetigkeit von $f$

## Beweis, Hinlänglichkeit II

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_n\right) &= \mathbb{P}\left\{\sup_{d(t,s)<\delta_n'} |f_t - f_s| > \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{\sup_{(t,s)\in T_{\delta_n'}} |f_{(t,s)}| > \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}\right\} \\
&\leq 2\mathbb{P}\left\{\sup_{(t,s)\in T_{\delta_n'}} f_{(t,s)} > \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}\right\} \\
\mathbb{E}\|f^{(\delta_n')}\| = \phi(\delta_n') \leq \phi(\delta_n) \leq \tfrac{1}{2^n} \qquad &\leq 2\mathbb{P}\left(\|f^{(\delta_n')}\| > u + \mathbb{E}\|f^{(\delta_n')}\|\right) \\
&= 2\mathbb{P}\left(\|f^{(\delta_n')}\| - \mathbb{E}\|f^{(\delta_n')}\| > u\right)
\end{aligned}
$$

# Anwendung: Stetigkeit von $f$

## Beweis, Hinlänglichkeit III

$$2\mathbb{P}\left(\|f^{(\delta_n')}\| - \mathbb{E}\|f^{(\delta_n')}\| > u\right) \overset{\text{Borell-TIS}}{\leq} 2e^{-\frac{u^2}{2\sigma_{T_\delta}^2}}$$

$$\sigma_{T_\delta}^2 = \sup_{(t,s)\in T_{\delta_n'}} d^2(s,t) \leq (\delta_n')^2 \leq \frac{1}{2^{2n}} \qquad \leq 2\exp\left(-\frac{\left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} - \frac{1}{2^n}\right)^2}{2\frac{1}{2^{2n}}}\right)$$

$$= 2\exp\left(-\left(2^{n-1} - 2^{n-\frac{n}{2}} - \frac{1}{2}\right)\right) \leq Ke^{-2^{n-1}}$$

- Damit ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$$
nach dem Lemma von Borell-Cantelli.
- Damit ist $f$ fast sicher gleichmäßig stetig auf $T$.

# Hilfsmittel

## Lemma

- Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ ein Zufallsvektor mit unabhängigen Komponenten $X_i \sim N(0,1)$ für $i = 1, \dots, k$.
- Habe $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lipschitzkonstante 1 und sei $f \in C^2(\mathbb{R}^k)$.
- Sei außerdem $\mathbb{E}f(X) = 0$.
- Dann gilt für alle $u > 0$

$$\mathbb{E}e^{uf(X)} \leq e^{\frac{u^2}{2}}.$$

## Bemerkung

- Ist $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ lipschitz-stetig , so ist eine Lipschitzkonstante gegeben durch

$$\|f\|_{Lip} := \sup_{x,y \in \mathbb{R}^k} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

# Hilfsmittel

## Lemma

- Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ ein Zufallsvektor mit unabhängigen Komponenten $X_i \sim N(0,1) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k$.
- Habe $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lipschitzkonstante $\sigma$, dann gilt für alle $u > 0$

$$\mathbb{P}\left(h(X) - \mathbb{E}h(X) > u\right) \leq e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}.$$

## Beweis I

- Sei zunächst $h \in C^2(\mathbb{R}^k)$.
- Hat $h$ die Lipschitzkonstante $\sigma$, so hat die skalierte Funktion $\frac{h}{\sigma}$ die Lipschitzkonstante 1.
- Skalieren wir h, so kann also o.B.d.A. $\sigma = 1$ angenommen werden.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(h(X) - \mathbb{E}h(X) > u\right) &= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_{(h(x)-\mathbb{E}h(X)>u)} d\mathbb{P}(x) \\
&= \int_{h(x)-\mathbb{E}h(X)>u} 1 \, d\mathbb{P}(x) \\
\overset{h(x)-\mathbb{E}h(X)>u \Rightarrow h(x)-\mathbb{E}h(X)-u>0}{} \quad &\leq \int_{h(x)-\mathbb{E}h(X)>u} e^{h(x)-\mathbb{E}h(X)-u} d\mathbb{P}(x) \\
\overset{\text{für } t>0}{} \quad &\leq \int_{h(x)-\mathbb{E}h(X)>u} e^{t(h(x)-\mathbb{E}h(X)-u)} d\mathbb{P}(x)
\end{aligned}$$

## Beweis II

$$\begin{aligned}
\int_{h(x)-\mathbb{E}h(X)>u} e^{t(h(x)-\mathbb{E}h(X)-u)}d\mathbb{P}(x) &= e^{-tu}\int_{h(x)-\mathbb{E}h(X)>u)} e^{t(h(x)-\mathbb{E}h(X))}d\mathbb{P}(x)\\
&\leq e^{-tu}\int_{\mathbb{R}^k} e^{t(h(x)-\mathbb{E}h(X))}d\mathbb{P}(x)\\
&= e^{-tu}\mathbb{E}e^{t(h(X)-\mathbb{E}h(X))}\\
\text{Lemma mit } h(x)-\mathbb{E}h(X)=f(x) \quad &\leq e^{-tu}\cdot e^{\frac{t^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}t^2-tu}\\
\text{wähle } t=u \quad &= e^{-\frac{u^2}{2}}
\end{aligned}$$

- Für die unskalierte Funktion gilt

$$e^{-\frac{u^2}{2}} \geq \mathbb{P}\left(\frac{h(X)}{\sigma} - \mathbb{E}\frac{h(X)}{\sigma} > u\right) = \mathbb{P}\left(h(X) - \mathbb{E}h(X) > u\sigma\right) \Leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{(u/\sigma)^2}{2}} \geq \mathbb{P}\left(h(X) - \mathbb{E}h(X) > u\right)$$

## Beweis III

- Sei $h$ nun beliebig.
- Wir approximieren $h$ durch

$$\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^2\left(\mathbb{R}^k\right) \text{ mit } \|h_n\|_{Lip} =: \sigma_n \leq \sigma \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{n\to\infty} h_n = h.$$

- Sei nun $e_n(x) := e^{t(h_n(x) - \mathbb{E}h_n(X))}$.
- $e_n(x)$ ist nichtnegativ und $\mathbb{P}$-messbar.
- Dann gilt nach dem Lemma von Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^k} \liminf_{n\to\infty} e_n(x) d\mathbb{P}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} e_n(x) d\mathbb{P}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} e^{\frac{t^2}{2\sigma_n^2}} \leq e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

# Beweis der Borell-TIS-Ungleichung

## Beweis für endliche Mengen $T = \{1, \dots, k\}$ I

- Ein zentrierter endlicher Gauß-Prozess ist ein Zufallsvektor $f \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$ mit Kovarianzmatrix
$$\Sigma = \left\{\sigma_{ij}^2\right\}_{i,j=1}^{k} \quad \text{mit } \sigma_{ij}^2 = \mathbb{E} f_i f_j.$$
- Dabei ist $\sigma_T^2 = \max_{1 \le i \le k} \sigma_{ii}^2$.
- Sei
$$X \sim N(\mathbf{0}, \mathbb{I}_k) \text{ und } A \in \mathbb{R}^{k \times k} \text{ derart, dass } A^T A = \Sigma.$$
- Dann ist $f \stackrel{D}{=} AX$, da $AX \sim N(\mathbf{0}, A^T \mathbb{I}_k A)$.
- Sei nun
$$h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \text{ mit } h(x) := \max_{1 \le i \le k} e_i A x,$$
wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ der i-te Einheitsvektor ist.
- Es gilt $h \in C^2\left(\mathbb{R}^k\right)$.

# Beweis der Borell-TIS-Ungleichung

## Beweis für endliche Mengen $T = \{1, \dots, k\}$ II

Die Abschätzung der Lipschitzkonstante von $h$ ergibt

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &= \left| \max_{1 \le i \le k} e_i A x - \max_{1 \le i \le k} e_i A y \right| \\
&\le \max_{1 \le i \le k} |e_i A (x - y)| \\
\text{Cauchy-Schwartz} \quad &\le \max_{1 \le i \le k} |e_i A| \cdot |x - y| \\
|e_i A|^2 = e_i^T A^T A e_i = e_i^T \Sigma e_i = \sigma_{ii}^2 \quad &\le \sigma_T \, |x - y| \, .
\end{aligned}$$

- Anwendung des Lemmas ergibt

$$\mathbb{P}\left(\|f\| - \mathbb{E}\|f\| > u\right) = \mathbb{P}\left(h(X) - \mathbb{E}h(X) > u\right) \le e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}} .$$

- Die Aussage $\mathbb{E}\|f\| = \mathbb{E} \max_{t \in T} f_t < \infty$ ist im endlichdimensionalen Fall trivial.

# Beweis der Borell-TIS-Ungleichung

## Erweiterung auf beliebige Mengen $T$, Approximation

- Sei $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ eine Folge von Teilmengen von $T$ mit $T_n \subset T_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
- und $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ sei eine dichte Teilmenge von $T$.

## Erweiterung auf beliebige Mengen $T$, $\mathbb{E}\,\|f\| < \infty$

- Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}\,\|f\| = \infty$ und wählen $u_0 \in \mathbb{R}$ so groß, dass

$$e^{-\frac{u_0^2}{\sigma_T^2}} \leq \frac{1}{4} \text{ und } \mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} f_t < u_0\right) \geq \frac{3}{4}.$$

- Da $\mathbb{E}\,\|f\|_{T_n} \to \mathbb{E}\,\|f\|_T = \infty$, wählen wir $n > 0$ so, dass $\mathbb{E}\,\|f\|_{T_n} > 2u_0$
- Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\geq 2e^{-\frac{u_0^2}{\sigma_T^2}} \geq 2e^{-\frac{u_0^2}{\sigma_{T_n}^2}} \geq 2\mathbb{P}\left(\|f\|_{T_n} - \mathbb{E}\|f\|_{T_n} > u_0\right) \\
&\geq \mathbb{P}\left(\big|\|f\|_{T_n} - \mathbb{E}\|f\|_{T_n}\big| > u_0\right) \geq \mathbb{P}\left(\big|\mathbb{E}\|f\|_{T_n} - \|f\|_{T_n}\big| > u_0\right) \\
&\geq \mathbb{P}\left(\mathbb{E}\|f\|_{T_n} - \|f\|_{T_n} > u_0\right) \geq \mathbb{P}\left(\mathbb{E}\|f\|_{T_n} - \|f\|_T > u_0\right) \\
&\geq \mathbb{P}\left(\|f\|_T < u_0\right) \geq \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

- ein Widerspruch.

# Beweis der Borell-TIS-Ungleichung

## Erweiterung auf beliebige Mengen $T$, $\mathbb{P}(\|f\| - \mathbb{E}\|f\| > u) \leq e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}$

- Es gilt für $n \to \infty$
$$\sup_{t \in T_n} f_t \xrightarrow{\text{f.s.}} \sup_{t \in T} f_t \quad \text{und} \quad \sigma_{T_n}^2 \to \sigma_T^2 < \infty.$$
- Da beide Folgen monoton konvergieren und $\mathbb{E}\sup_{t \in T_n} f_t \to \mathbb{E}\sup_{t \in T} f_t < \infty$ gilt
$$\|f\|_{T_n} - \mathbb{E}\|f\|_{T_n} \xrightarrow{\text{f.s.}} \|f\|_T - \mathbb{E}\|f\|_T.$$
- Also konvergiert die Folge auch in Verteilung
$$\mathbb{P}(\|f\|_{T_n} - \mathbb{E}\|f\|_{T_n} \geq u) \to \mathbb{P}(\|f\|_T - \mathbb{E}\|f\|_T \geq u) \quad \forall u > 0.$$
- Da auch
$$e^{\frac{u^2}{2\sigma_{T_n}^2}} \to e^{\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}$$
folgt die allgemeine Borell-TIS-Ungleichung aus dem endlichdimensionalen Fall.

# Die Slepian-Ungleichung

## Satz

- Seien $f$ und $g$ zentrierte Gauß-Prozesse und fast sicher beschränkt auf T.
- Seien außerdem

$$\mathbb{E}f_t^2 = \mathbb{E}g_t^2 \ \ \forall t \in T \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\left(f_t - f_s\right)^2 \leq \mathbb{E}\left(g_t - g_s\right)^2 \ \ \forall s, t \in T.$$

- Dann gilt für alle $u \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\|f\| > u\right) \leq \mathbb{P}\left(\|g\| > u\right) \quad \text{und außerdem} \quad \mathbb{E}\|f\| \leq \mathbb{E}\|g\|.$$

# Die Sudakov-Fernique-Ungleichung

## Satz

- Seien $f$ und $g$ Gauß-Prozesse und fast sicher beschränkt auf T.
- Seien außerdem

$$\mathbb{E}f_t = \mathbb{E}g_t \;\; \forall t \in T \quad \text{und } \mathbb{E}\left(f_t - f_s\right)^2 \leq \mathbb{E}\left(g_t - g_s\right)^2 \;\; \forall s, t \in T.$$

- Dann gilt $\mathbb{E}\|f\| \leq \mathbb{E}\|g\|$.

# Quellen


- R. J. Adler, J. E. Taylor: Random Fields And Geometry, Springer, 2007

# Bildnachweis

- http://www.cse.psu.edu/ yasong/publications/MMSG.jpg