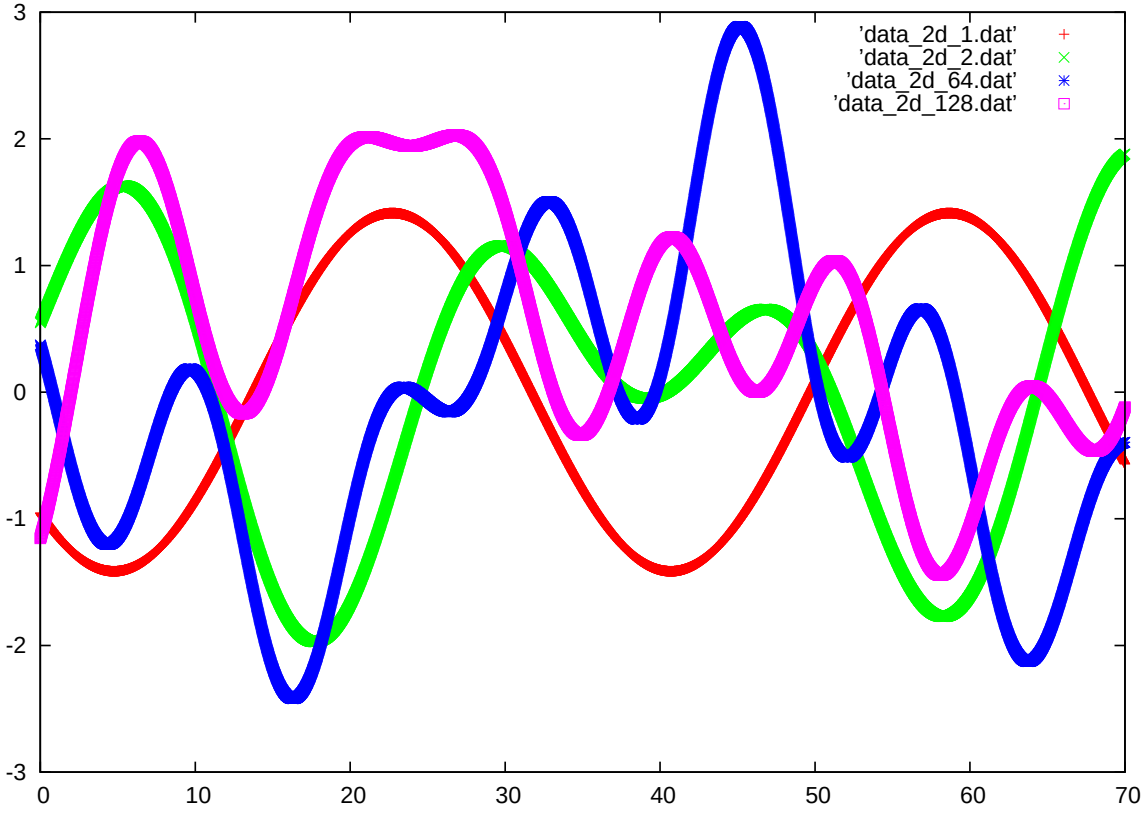
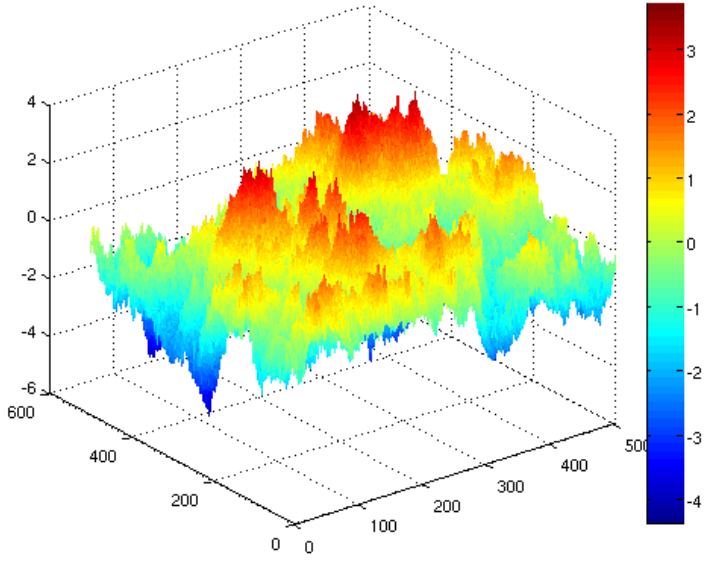




Gaußsche Felder und Simulation

Definition, Beschränktheit, Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Simulation

Benedikt Jahn, Aaron Spettl | 4. November 2008
Institut für Stochastik, Seminar Zufällige Felder

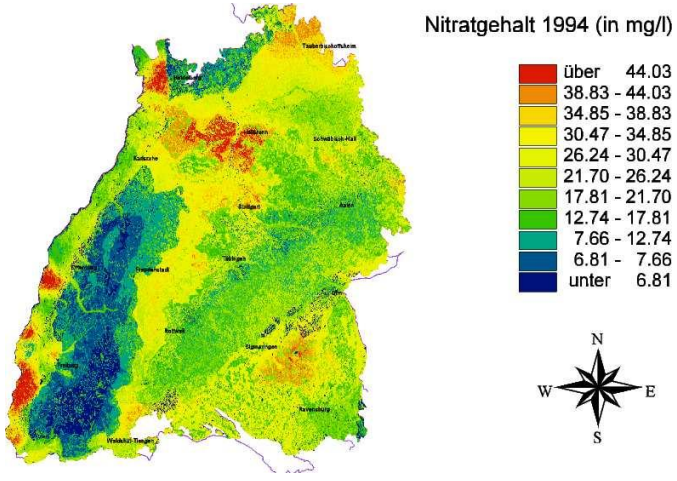
Inhalt

- Einleitung
  - Zufallsfeld
  - Gauß-Prozess
- Stetigkeit, Beschränktheit und Differenzierbarkeit
  - Ziel
  - Vorbereitung
  - Hauptaussagen
- Simulation
  - Wiederholung
  - Unbedingte Simulation
  - Bedingte Simulation
  - Wahl von n
- Zusammenfassung

Zufallsfeld

Motivation - Beispiel:

- Modellierung von Messwerten in Abhängigkeit vom Ort, z. B. Nitratkonzentration im Grundwasser in Baden-Württemberg:



- Ziel: Extrapolation auf Orte ohne vorhandene Messung.

Zufallsfeld

Definition

Ein stochastischer Prozess

$$\{Z(t,\omega) : t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega\}$$

heißt **Zufallsfeld**, speziell für $d \geq 2$.
Dabei ist

- $Z(t) := Z(t, \cdot)$ eine Zufallsvariable und
- $z(\cdot) := Z(\cdot, \omega)$ eine Realisierung des Zufallsfeldes.

Zufallsfeld: Erwartungswert- und Kovarianzfunktion

Definition

Für ein Zufallsfeld Z heißt

$$m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} , \ t \mapsto \mathrm{E}(Z(t))$$

die **Erwartungswertfunktion** und

$$C : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} , \ (s,t) \mapsto \mathrm{Cov}(Z(s), Z(t))$$

die **Kovarianzfunktion**.
Falls $m(t) \equiv 0$, dann heißt Z **zentriert**.

Zufallsfeld: Stationarität

Definition

- Ein Zufallsfeld Z heißt **stationär** (im engeren Sinne), falls für alle $n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^d, h \in \mathbb{R}^d$ gilt:

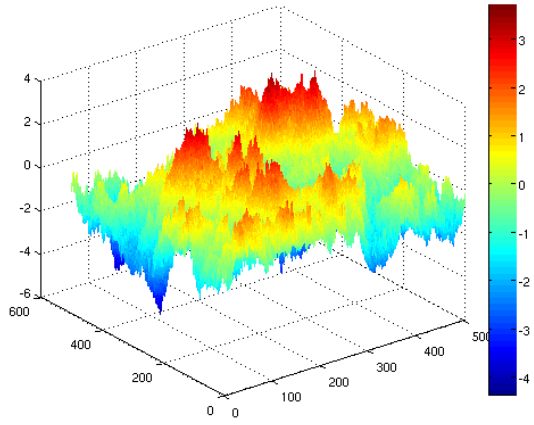
$$(Z(t_1 + h), \ldots, Z(t_n + h)) \stackrel{d}{=} (Z(t_1), \ldots, Z(t_n))$$

- Ein Zufallsfeld heißt **stationär 2. Ordnung**, falls die Erwartungswertfunktion $m(t)$ konstant (und endlich) ist und die Kovarianzfunktion $C(s, t)$ nur von $s - t$ abhängt.
- Ein stationäres Zufallsfeld 2. Ordnung heißt **isotrop**, falls $C(h) = C(|h|)$.

Einleitung

Gauß-Prozess

- Stochastischer Prozess
- „Erweiterung“ der multivariaten Normalverteilung auf eine unendliche Indexmenge



- Beispiele:
  Brownsche Bewegung, Gaußsches weißes Rauschen

Einleitung

Fragestellungen:

- Stetigkeit und Beschränktheit?
- Differenzierbarkeit?
- Simulationsverfahren

Gauß-Prozess

Definition

Ein stochastischer Prozess

$$\{Z(t,\omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$$

mit der Indexmenge $T \subset \mathbb{R}^d$ heißt **Gauß-Prozess** oder **Gaußsches Feld**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in T$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha_1 Z(t_1) + \cdots + \alpha_n Z(t_n) \sim N(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$$

Wir nehmen an, dass Z nach $\mathbb{R}$ abbildet.

Bemerkung

Mit dem Existenzsatz von Kolmogorow kann man zeigen, dass ein solcher Gauß-Prozess existiert.

Inhalt

- Einleitung
  - Zufallsfeld
  - Gauß-Prozess
- Stetigkeit, Beschränktheit und Differenzierbarkeit
  - Ziel
  - Vorbereitung
  - Hauptaussagen
- Simulation
  - Wiederholung
  - Unbedingte Simulation
  - Bedingte Simulation
  - Wahl von n
- Zusammenfassung

Ziel

Fast sicher beschränkt:

$$P\left(\sup_{t\in T}|Z(t)|<\infty\right)=1$$

Fast sicher stetig:

$$P\left(\lim_{s\to t}|Z(t)-Z(s)|=0\ ,\ \forall t\in T\right)=1$$

(erfordert Metrik)

Wahl der Metrik

Definition

Die Pseudometrik

$$d(s,t) := \sqrt{\mathrm{E}((Z(s) - Z(t))^2)}$$

nennen wir **kanonische Metrik** für T bzw. Z.

Bemerkung

T kompakt $\Rightarrow$ Wahl der Metrik irrelevant für Stetigkeit von Z.

Vorgehen

Später, für T kompakt:

- Unter der ein- und derselben Voraussetzung werden wir Beschränktheit und Stetigkeit erhalten.
- Diese hängt anschaulich von der „Größe“ von T ab.

$\Rightarrow$ Definiere ein Maß für die „Größe“ von T.

Entropie und Log-Entropie

Definition

Sei $B_d(t, \varepsilon)$ die Kugel um den Punkt t mit Radius ε unter der Metrik d, d. h.

$$B_d(t, \varepsilon) := \{s \in T : d(s, t) \leq \varepsilon\}$$

Sei $N(T, d, \varepsilon) \equiv N(\varepsilon)$ die Mindestanzahl benötigter Kugeln mit Radius ε, um T zu überdecken. $N(\varepsilon)$ heißt **(metrische) Entropie** und

$$H(T, d, \varepsilon) \equiv H(\varepsilon) := \log(N(\varepsilon))$$

entsprechend **Log-Entropie** für T (oder Z).

Stetigkeitsmodulus

Definition

Für eine Funktion $f : T \to \mathbb{R}$ nennen wir

$$\omega_{f,\tau}(\delta) := \sup_{s,t \in T:\ \tau(s,t) \leq \delta} |f(t) - f(s)| \ , \quad \delta > 0$$

den **Stetigkeitsmodulus** für f unter der Metrik τ.

Bemerkung

- Je kleiner der Stetigkeitsmodulus, desto „näher“ ist die Funktion an der Stetigkeit.
- Falls $\omega_{f,\tau}(\delta) \to 0$ für $\delta \to 0$, dann ist f stetig.

Hauptaussage

Theorem

Sei Z ein zentrierter Gauß-Prozess und T kompakt bzgl. der kanonischen Metrik.
Dann existiert ein zufälliges $\eta \in (0, \infty)$ und eine Konstante K, sodass

$$\omega_{Z,d}(\delta) \leq K \int_0^{\delta} \sqrt{H(\varepsilon)} d\varepsilon \ , \ \forall\, 0 < \delta < \eta$$

Korollar

Wenn das obige Integral für ein δ endlich ist, dann ist Z f. s. stetig und beschränkt.

Hauptaussage

Beweisskizze:

- Konstruiere eine Teleskopsumme:

$$Z(t) - Z(t_0) = \sum_{j>i} \left(Z(\pi_j(t)) - Z(\pi_{j-1}(t)) \right) \ , \ \forall t \in T$$

(spezielle Wahl von i und der Fkt. π_j erfordert T kompakt)

- Schätze damit für $0 < \delta < \eta$ ab:

$$|Z(t) - Z(s)| \leq K \int_0^{\delta} \sqrt{H(\varepsilon)} d\varepsilon \ , \ \forall s, t \in T : d(s,t) \leq \delta$$

(erfordert $Z(t) \sim N(0, \cdot), \ \forall t \in T$)

Beispiel: Brownsche Bewegung

Sei W der Standard-Wiener-Prozess auf $T = [0, 1]$, also

- $W(0) = 0$
- $\{W(t), t \in T\}$ hat unabhängige Zuwächse
- $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s), \ \forall\ 0 \leq s < t$

Frage:

Wie sieht das Integral aus dem Theorem für diesen Prozess W aus?

Beispiel: Brownsche Bewegung

- Da $W(s) - W(t) \sim N(0, |s-t|)$:

$$d(s,t) \overset{\text{Def.}}{=} \sqrt{\mathrm{E}((W(s)-W(t))^2)} = \sqrt{|s-t|}$$

- $B_d(t,\varepsilon) = \{s \in T : d(s,t) \leq \varepsilon\} = \{s \in T : |s-t| \leq \varepsilon^2\}$
- $H(\varepsilon) = \log N(\varepsilon) = \log \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon^2} \right\rceil$:
  $N(\varepsilon)$ ist die Mindestanzahl der benötigten Kugeln mit Radius ε bzgl. $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, um $T = [0,1]$ zu überdecken.

Also:

$$\int_0^\delta \sqrt{H(\varepsilon)}\,d\varepsilon = \int_0^\delta \sqrt{\log\left\lceil \frac{1}{2\varepsilon^2} \right\rceil}\,d\varepsilon$$

Beispiel: Brownsche Bewegung

$$\int_0^\delta \sqrt{\log\left\lceil \frac{1}{2\varepsilon^2} \right\rceil}\, d\varepsilon$$

$$\overset{\text{Wähle } \delta<1}{\leq} \int_0^\delta \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon^2}}\, d\varepsilon$$

$$\overset{\text{Subst.: } y=\frac{1}{\varepsilon^2}}{=} \int_{\frac{1}{\delta^2}}^\infty \frac{\sqrt{\log y}}{2y^{\frac{3}{2}}}\, dy$$

$$\overset{\substack{\text{Wähle } \delta\leq\frac{1}{2} \\ \text{dann: } \log y\leq\sqrt{y}}}{\leq} \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\delta^2}}^\infty y^{-\frac{5}{4}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-4\cdot\frac{1}{y^{\frac{1}{4}}}\right]_{\frac{1}{\delta^2}}^\infty$$

$$= 2\cdot\sqrt{\delta}$$

Anwendung: Hinreichende Bedingung

Theorem

Sei Z ein zentrierter Gauß-Prozess, T kompakt und $|\cdot|$ die euklidische Metrik. Wenn für ein $0 < C < \infty$ und $\alpha, \eta > 0$

$$\mathrm{E}\left(|Z(s) - Z(t)|\right) \leq \frac{C}{\left|\log|s-t|\right|^{1+\alpha}} \;,\; \forall s,t \in T : |s-t| < \eta$$

gilt, dann ist Z f. s. stetig und beschränkt.

Anwendung: Differenzierbarkeit

Definition

Seit Z ein zentrierter Gauß-Prozess. Sei $t \in \mathbb{R}^d$ beliebig und seien k Richtungen $t'_1, \ldots, t'_k \in \mathbb{R}^d$ gegeben, $t' = (t'_1, \ldots, t'_k)$.
Z hat **im Punkt t eine partielle Ableitung der Ordnung k in Richtung** t' (im L^2-Sinn), wenn folgender Grenzwert im L^2-Sinn existiert:

$$D^k_{L^2} Z(t, t') := \lim_{h_1, \ldots, h_k \to 0} \frac{1}{\prod_{i=1}^k h_i} F\left(t, \sum_{i=1}^k h_i t'_i\right)$$

wobei $F(t, t') := \sum_{s \in \{0,1\}^k} (-1)^{k - \sum_{i=1}^k s_i} Z\left(t + \sum_{i=1}^k s_i t'_i\right)$ die symmetrische Differenz ist.

Anwendung: Differenzierbarkeit

Konstruktion

$$\begin{aligned} \|(s,s')\|_{d,k} &:= |s| + \|s'\|_{\otimes^k \mathbb{R}^d} = |s| + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |s_i'|^2} \\ T_{k,\rho} &:= T \times \{t' \in \otimes^k \mathbb{R}^d : \|t'\|_{\otimes^k \mathbb{R}^d} \in (1-\rho, 1+\rho)\} \end{aligned}$$

und sei $B_{d,k}(y,h)$ die Kugel um $y = (t,t')$ mit Radius h unter $\|\cdot\|_{d,k}$.

Bemerkung

Wenn Z ein Gauß-Prozess ist, dann ist seine Ableitung im L^2 ebenfalls ein Gauß-Prozess, falls sie existiert.

Anwendung: Differenzierbarkeit

Theorem

Sei Z ein zentrierter Gauß-Prozess, T offen und beschränkt, alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung mögen im L^2-Sinn existieren. Weiterhin soll ein K mit $0 < K < \infty$ und $\rho, \delta, h_0 > 0$ existieren, sodass für $0 < \eta_1, \eta_2, h < h_0$ gilt:

$$\mathrm{E}\left((F(t,\eta_1 t') - F(s,\eta_2 s'))^2\right) < \frac{K}{\left(-\log(\|(t,t')-(s,s')\|_{d,k} + |\eta_1 - \eta_2|)\right)^{1+\delta}}$$

für alle $((t,t'),(s,s')) \in T_{k,\rho} \times T_{k,\rho} : (s,s') \in B_{d,k}((t,t'),h)$.

Dann ist $Z \in C^k(T)$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

Inhalt

- Einleitung
  - Zufallsfeld
  - Gauß-Prozess
- Stetigkeit, Beschränktheit und Differenzierbarkeit
  - Ziel
  - Vorbereitung
  - Hauptaussagen
- Simulation
  - Wiederholung
  - Unbedingte Simulation
  - Bedingte Simulation
  - Wahl von n
- Zusammenfassung

Wiederholung

Definition

Sei Z ein zufälliger Prozess auf $\mathbb{R}^d$.
Z heißt **stationär zweiter Ordnung**, wenn gilt:

- $\mathrm{E}\{Z(t)\} = m < \infty,\ \forall t \in \mathbb{R}^d$
- $\mathrm{Cov}\{Z(s), Z(t)\} = C(s-t) < \infty,\ s, t \in \mathbb{R}^d$

Die Funktion C heißt Kovarianzfunktion von $Z(t)$.

Wiederholung

Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS)

Sei $Y_1, \ldots, Y_n$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}(Y_i) = m < \infty$ und $\mathrm{Var}(Y_i) = \sigma^2 < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < y\right) = \Phi(y)$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Unbedingte Simulation

Voraussetzungen:

- Z habe Kovarianzfunktion C
- Z stationär zweiter Ordnung
- Z Gauß-Prozess mit

$$m(t) = \mathrm{E}(Z(t)) \equiv 0$$

und

$$\mathrm{Var}(Z) := C(0) = 1$$

- $T \subset \mathbb{R}^d$ zusammenhängend

Aufgabenstellung

Simulation von Z auf T

Lösungsansatz

- Simuliere $\{Z_i\}_{i=1,\dots,n}$, wobei Z_i unabhängige stationäre Prozesse mit Kovarianzfunktion C.
- Nach ZGWS für n genügend groß:
  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Z_i$ ist näherungsweise Gauß-Prozess.

Probleme:

- Simulation der Z_i
- Wahl von n

Verfahren:

- Spektralmethode
- Turning Bands
- Dilution

Spektralmethode

- Bekannt: Kovarianzfunktion C ist immer positiv semidefinit
- Annahme: C stetig
- Satz von Bochner: C ist Fouriertransformation eines endlichen Maßes χ:

$$C(h) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<h,u>} d\chi(u)$$

- Da $C(0) = 1 \Rightarrow \chi$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß
- χ heißt Spektralmaß

Spektralmethode

Sei

- V Zufallsvektor, $V \sim \chi$
- U auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable
- V, U unabhängig

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$Z(t) = \sqrt{2}\cos(< V, t > + 2\pi U)$$

ein Stochastischer Prozess mit $\mathrm{E}(Z) = 0$, $\mathrm{Var}(Z) = 1$ und Kovarianzfunktion C.

Spektralmethode

Bestimmung von χ

Sei C integrierbar
$\Rightarrow \chi$ hat eine Dichte f.
$\Rightarrow$ Zusammenhang zwischen f und C:

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<u,h>} C(h) dh$$

Spektralmethode

Algorithmus: Spektralmethode

1. Erzeuge $V_1, \ldots, V_n \sim \chi, U_1, \ldots, U_n \sim U(0,1)$
2. Berechne $Z^{(n)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \cos(< V_k, t > +2\pi U_k)\ ,\ \forall t \in T$

Bemerkung

$Z^{(n)}$ ist näherungsweise ein Gauß-Prozess mit der gewünschten Kovarianzfunktion, wenn n genügend groß.

Spektralmethode: Beispiel

Sei $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{a}\right)$, die Exponentielle Kovarianzfunktion
Dann gilt:

$$f(u) = \frac{\Gamma(\mu)}{\pi^{\mu}} \frac{a^d}{(1 + a^2|u|^2)^{\mu}}$$

mit $\mu = \frac{d+1}{2}$.

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

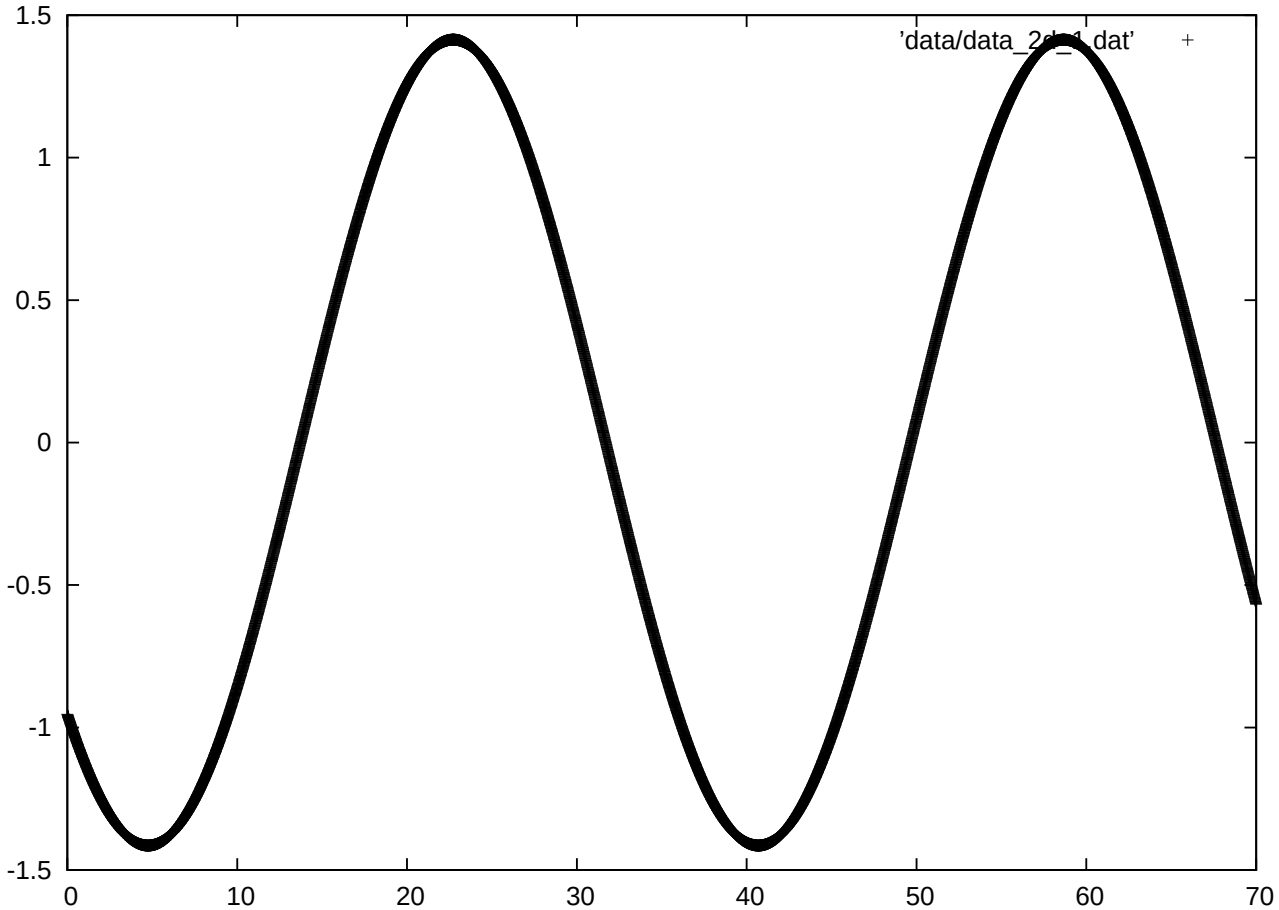


Abbildung: Simulation mit $n = 1$ für $T \subset \mathbb{R}$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{2}\right)$

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

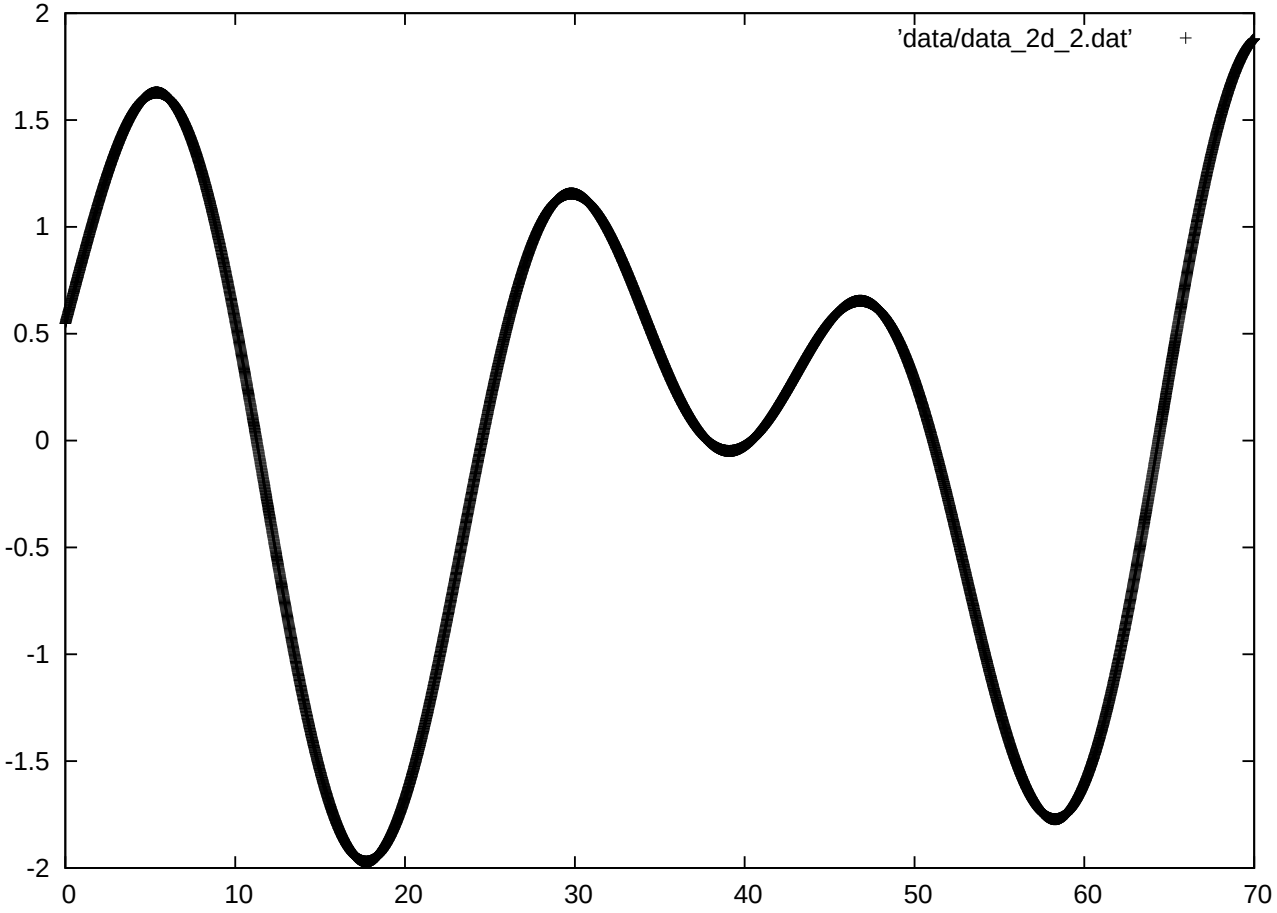


Abbildung: Simulation mit $n = 2$ für $T \subset \mathbb{R}$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{2}\right)$

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

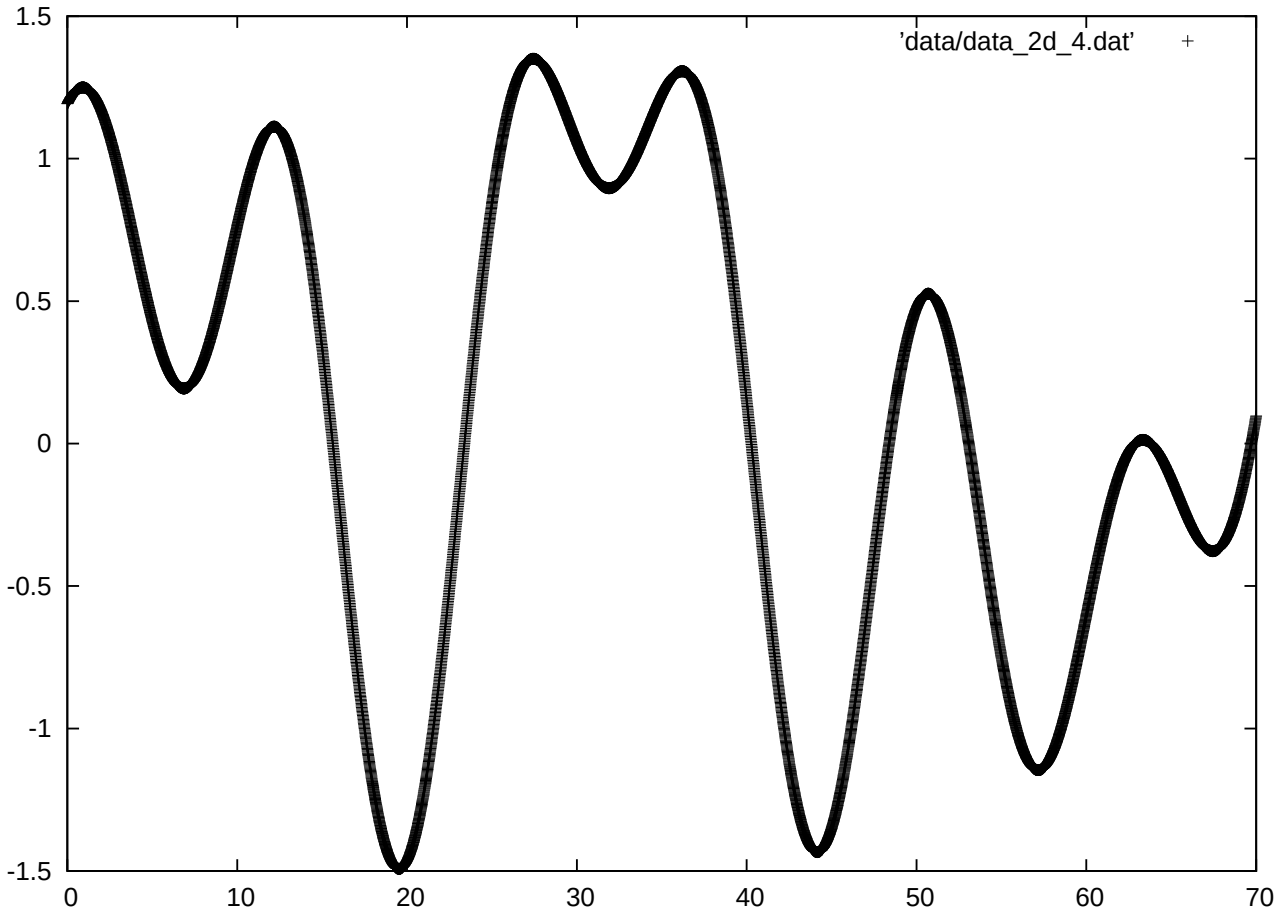


Abbildung: Simulation mit $n = 4$ für $T \subset \mathbb{R}$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{2}\right)$

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

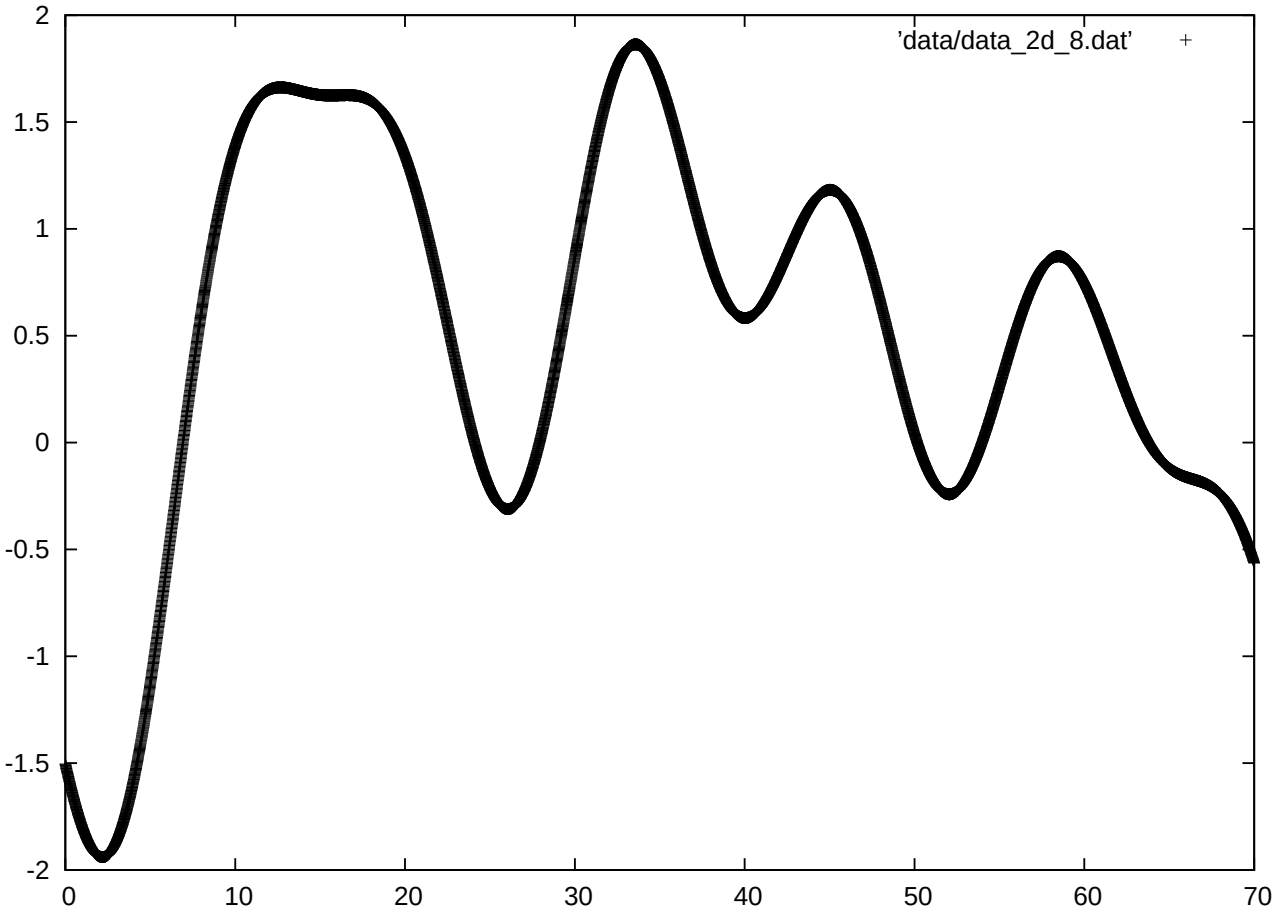


Abbildung: Simulation mit $n = 8$ für $T \subset \mathbb{R}$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{2}\right)$

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

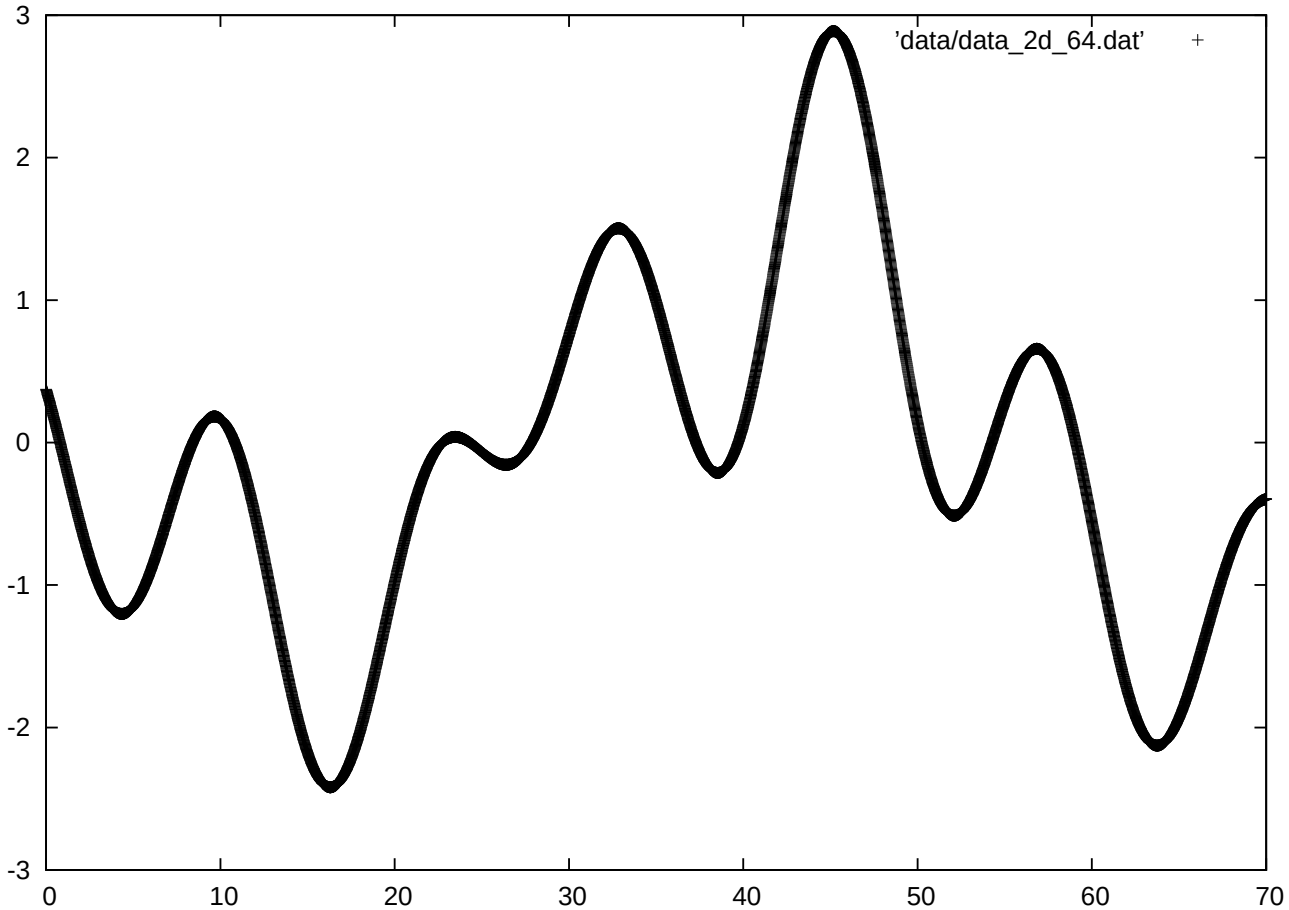


Abbildung: Simulation mit $n = 64$ für $T \subset \mathbb{R}$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{2}\right)$

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

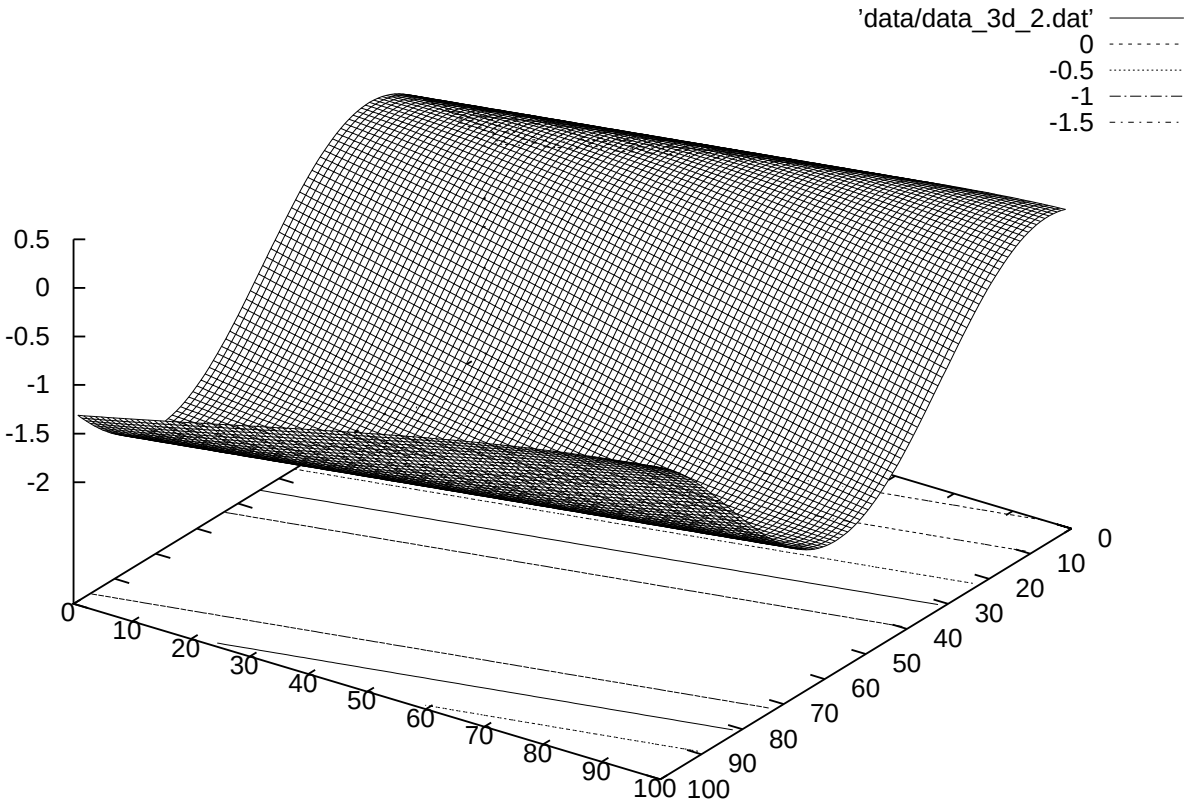


Abbildung: Simulation mit $n = 2$ für $T \subset \mathbb{R}^2$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{\pi}\right)$

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

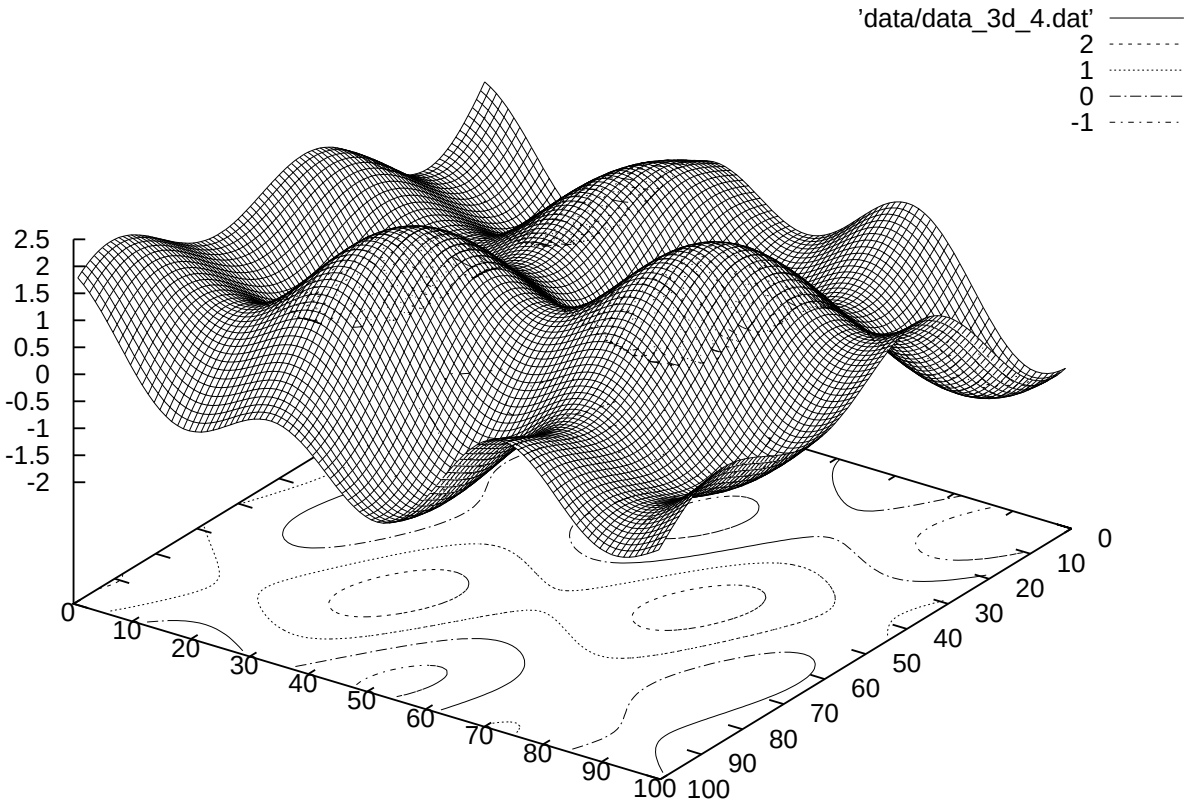


Abbildung: Simulation mit $n = 4$ für $T \subset \mathbb{R}^2$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{\pi}\right)$

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

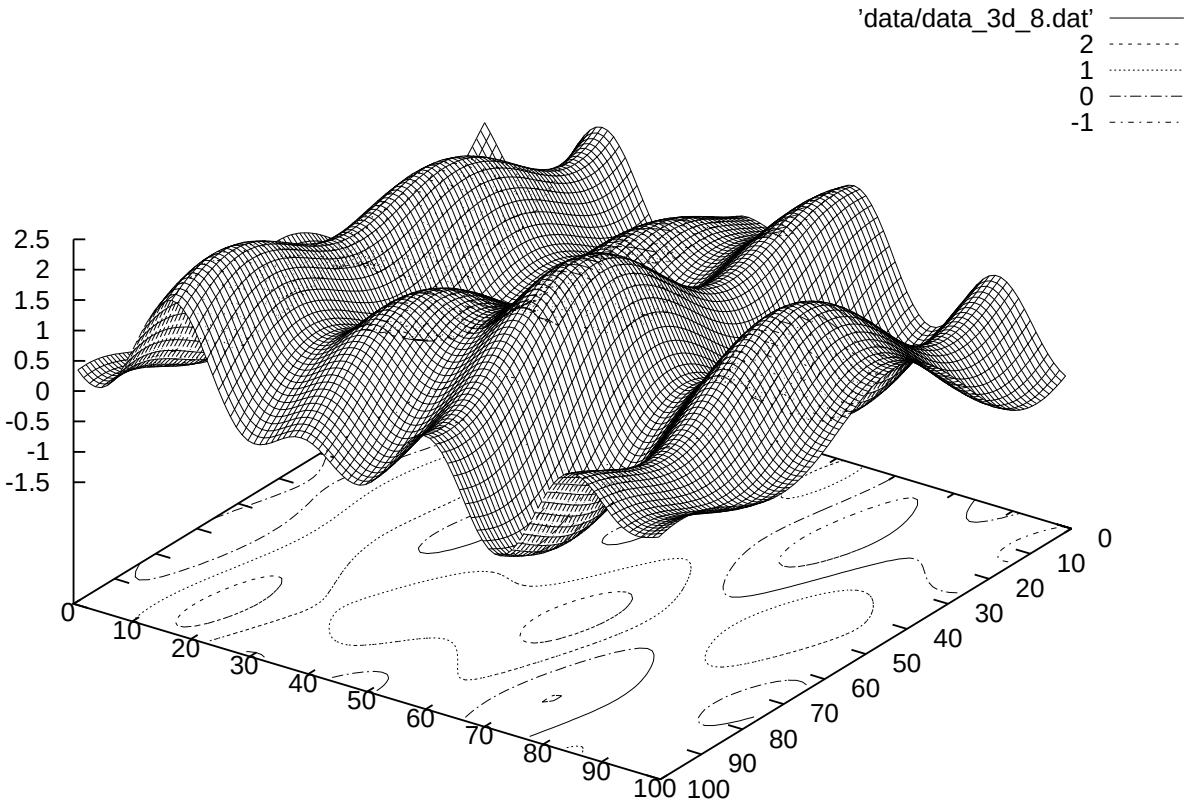


Abbildung: Simulation mit $n = 8$ für $T \subset \mathbb{R}^2$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{\pi}\right)$

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

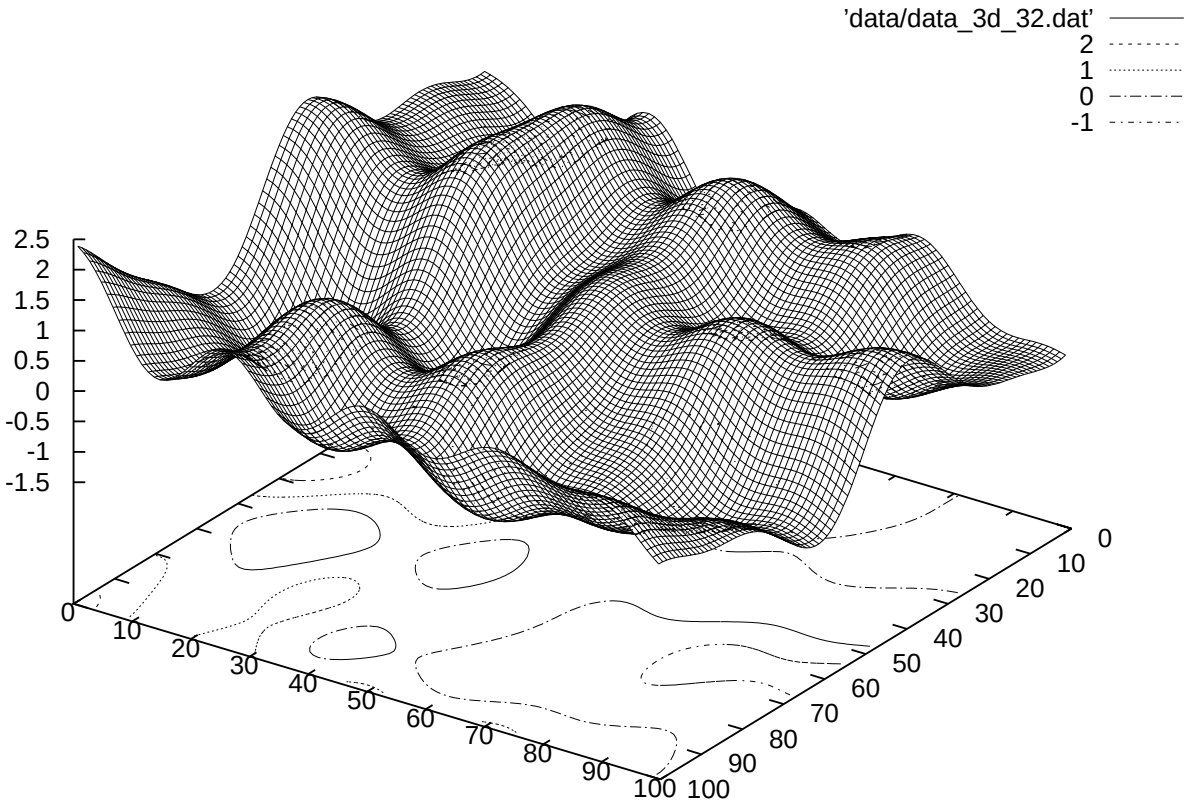


Abbildung: Simulation mit $n = 32$ für $T \subset \mathbb{R}^2$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{\pi}\right)$

Spektralmethode: Simulation einer Realisierung

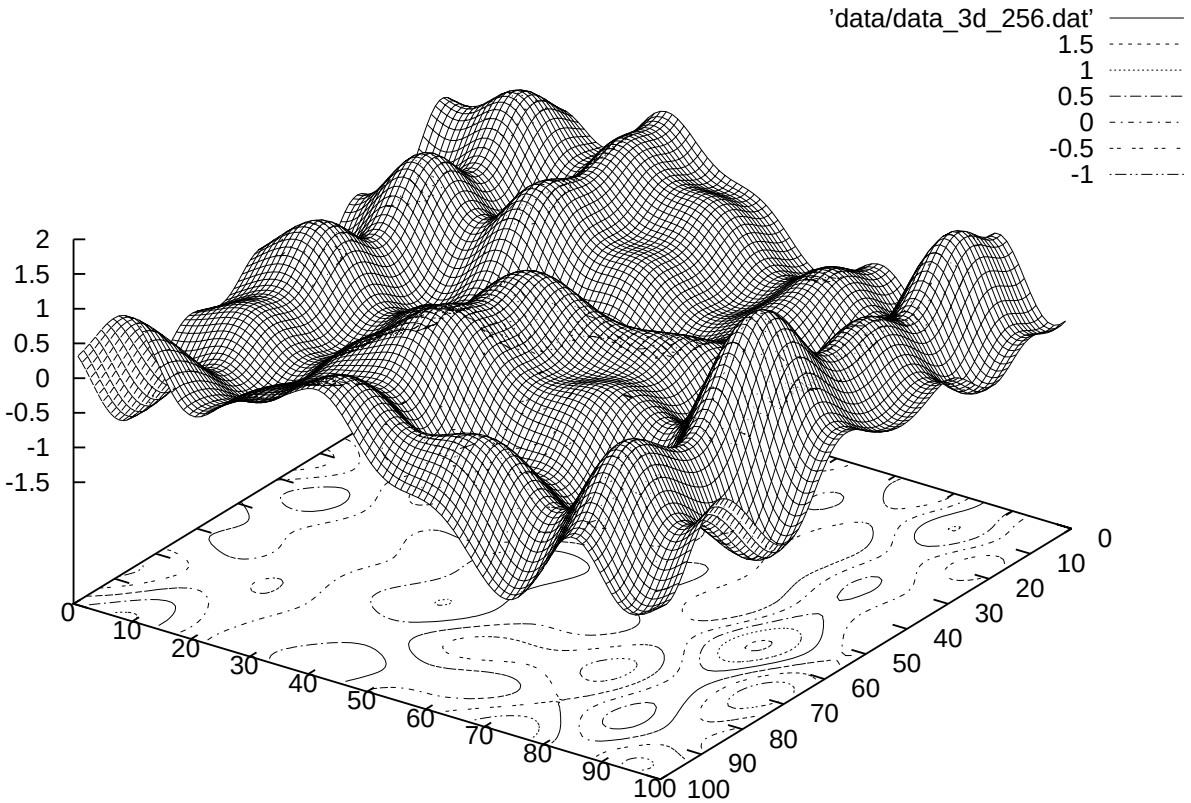


Abbildung: Simulation mit $n = 256$ für $T \subset \mathbb{R}^2$, $C(h) = \exp\left(-\frac{|h|}{\pi}\right)$

Turning Bands

- Approximiere Z durch n eindimensionale stochastische Prozesse Z_i in verschiedenen Richtungen.
- Bei richtiger Wahl der Kovarianzfunktionen für die Z_i und geeigneten Richtungen ist die Summe dieser Prozesse näherungsweise ein Gauß-Prozess.

Dilution: Idee

- Simuliere einen homogonen Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^d$ mit geeigneter Intensität.
- „Ergänze“ die simulierten Punkte um eine bestimmte Menge.
- Addiere für alle darin enthaltenen t mit Wahrscheinlichkeit 0.5 eine 1 oder -1 zu dem bisher simulierten $Z(t)$ (initialisiert mit 0).
- Nach dem ZGWS konvergiert dies gegen einen Gauß-Prozess.

Dilution: Vorgehen

Sei C darstellbar als $C(h) = \theta \cdot \mathrm{E}\{|A \cap A_h|\}$, wobei

- $A \subset \mathbb{R}^d$ eine zufällige kompakte Menge
- $A_h := \{a + h, a \in A\}$
- θ ein Proportionalitätsfaktor

Dann ist

$$Z(t) = \sum_{x \in X} \varepsilon(x) 1_{t \in A_x} \ , \ t \in T$$

ein Gauß-Prozess mit obiger Kovarianzfunktion, wobei

- X homogener Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität θ
- $\forall x \in X$: $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ mit $P(\varepsilon(x) = 1) = \frac{1}{2}$

Bedingte Simulation

Es gelte:

- Sei Z Gauß-Prozess auf $\mathbb{R}^d$
- $\mathrm{E}(Z) = 0$, $\mathrm{Var}(Z) = 1$
- Z habe Kovarianzfunktion C

Aufgabenstellung

Simuliere Z, sodass gilt:

$$Z(b) = z(b)\ ,\ \forall b \in B \subset \mathbb{R}^d, B \text{ endlich}$$

Bedingte Simulation

Definition

Der **Kriging-Schätzer** $Z^*(t)$ von $Z(t)$ für die gegebenen $Z(b), b \in B$, ist die Linearkombination, sodass

$$Z^*(t) = \sum_{b \in B} \lambda_b(t) Z(b)$$

den mittleren quadratischen Fehler

$$\varepsilon(t) = \mathrm{E}(Z^*(t) - Z(t))^2$$

minimiert.

Bedingte Simulation: Algorithmus

Algorithmus

1. Berechne die Schätzer

$$z^*(t) = \sum_b \lambda_b(t) z(b) \ , \ \forall t \in T$$

2. Simuliere einen Gauß-Prozess mit Erwartungswert 0 und Kovarianzfunktion C, sei y diese Realisierung.
3. Berechne die Schätzer

$$y^*(t) = \sum_b \lambda_b(t) y(b) \ , \ \forall t \in T$$

4. Setze $Z(t) = z^*(t) + y(t) - y^*(t) \ , \ \forall t \in T$

Bedingte Simulation: Algorithmus

Ist $b \in B$ dann folgt:

$$z^*(b) = z(b), \quad y^*(b) = y(b)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} Z(b) &= z^*(b) + y(b) - y^*(b) \\ &= z(b) + y(b) - y(b) \\ &= z(b) \end{aligned}$$

Bedingte Simulation: Algorithmus

Sei $t \in T$ und $t \notin B$:
Simulation sollte nicht von den Daten beeinflusst werden.

Da gilt:

$$z^*(t) \approx 0, \quad y^*(t) \approx 0$$

folgt:

$$\begin{aligned} Z(t) &= z^*(t) + y(t) - y^*(t) \\ &\approx 0 + y(t) - 0 \\ &= y(t) \end{aligned}$$

Wahl von n

Sei n fixiert.
Wie „nah“ kommt die Verteilung von

$$Z^{(n)} = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}$$

der Verteilung einer Standardnormalverteilung?

Wahl von n

Das heißt:

Sei

- $t_1, \ldots, t_p \in T$
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$
- $F^{(n)}$ die Verteilung von $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j Z^{(n)}(t_j)$.
- F die Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 = \sum_{j,k=1}^{p} \lambda_j \lambda_k C(t_j - t_k)$

Wie groß ist der Abstand der Verteilung $F^{(n)}$ zu F?

Wahl von n

Die Abstandsmethode

- Berechne den Abstand $d(F^{(n)}, F)$ von $F^{(n)}$ und F.
- Stoppe, wenn d kleiner als ein kritischer Wert.
- Beispiel für d: Kolmogorow-Abstand:

$$d_k(F^{(n)}, F) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |F^{(n)}(y) - F(y)|$$

Wahl von n

Die Momentenmethode

- Vergleiche die Momente von $F^{(n)}$ und F.
- Stoppe, wenn Differenz der 4. Momente unter einem kritischen Wert.

Inhalt

Einleitung
- Zufallsfeld
- Gauß-Prozess

Stetigkeit, Beschränktheit und Differenzierbarkeit
- Ziel
- Vorbereitung
- Hauptaussagen

Simulation
- Wiederholung
- Unbedingte Simulation
- Bedingte Simulation
- Wahl von n

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Unter gewissen Voraussetzungen, im Wesentlichen über die Entropie der Indexmenge T, erhalten wir gleichzeitig die Stetigkeit und Beschränktheit eines Gauß-Prozesses.
- Eine Bedingung für die Differenzierbarkeit lässt sich über die Wahl eines speziellen T und passender Metrik herleiten.
- Für die Simulation spielt der zentrale Grenzwertsatz eine wichtige Rolle, da bei richtiger Normierung Folgen von i.i.d. stochastischen Prozessen gegen einen Gauß-Prozess konvergieren.

Literatur

R. Adler und J. Taylor
Random Fields And Geometry
Springer, New York, 2007

C. Lantuéjoul
Geostatistical Simulation - Models And Algorithms
Springer, Berlin, 2002