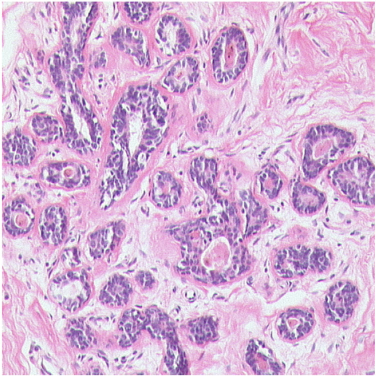
Innere Volumina

Eva Kohn

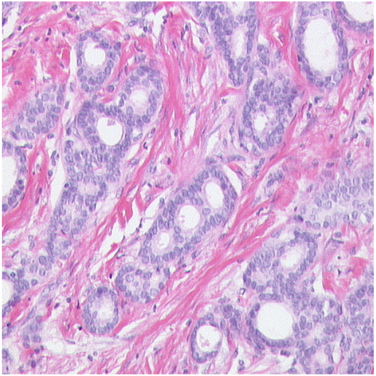
Seminar Zufällige Felder
Universität Ulm

09. Dezember 2008

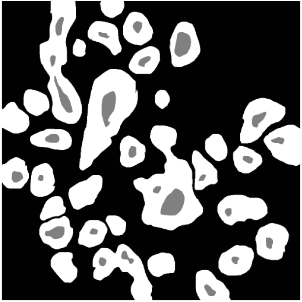
Inhalt

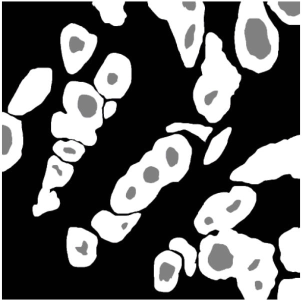


gesundes Gewebe



krankes Gewebe (Krebs)





zur Auswertung bearbeitete Bilder

Durch Schätzung z.B. der Flächenverhältnisse kann (evtl.) bestimmt werden, ob jemand krank ist oder nicht.

Inhalt

Topologie

- Euklidische Metrik:

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_d-y_d)^2} \quad , x,\ y \in \mathbb{R}^d$$

- $B(x,r) = \{\ y \in \mathbb{R}^d :\ \|x-y\|\ \leq\ r\ \} \quad , x \in \mathbb{R}^d,\ r \geq 0$
- $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt $\Leftrightarrow$ A ist beschränkt und abgeschlossen
- $\mathbb{K} = \{A \subset \mathbb{R}^d :\ A \text{ kompakt}\}$

konvexe Mengen

- $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex
  $\Leftrightarrow \quad \forall x, y \in K$ gilt: $\quad cx + (1-c)y \in K \quad \forall 0 \leq c \leq 1$
- $L \subset \mathbb{R}^d$ affin-linearer Unterraum
  $\Leftrightarrow \quad \forall x, y \in L$ gilt: $\quad cx + (1-c)y \in L \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- $L \subset \mathbb{R}^d$ linearer Unterraum $\Leftrightarrow$ L affin-linear und $0 \in L$
- konvexe Körper: $C(\mathbb{K}) = \{K \in \mathbb{K} : \; K \text{ konvex}\}$

Mengenoperationen

- Skalierung:

$$cA = \{cx : x \in A\} \qquad c \in \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}^d$$

- Translation:

$$A_x = A + x = \{y + x : y \in A\} \quad A \subset \mathbb{R}^d,\ x \in \mathbb{R}^d$$

- Minkowski-Addition:

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\} \quad A, B \subset \mathbb{R}^d$$

Euklidische Isometrie:

Eine Funktion m: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto x'$, heißt euklidische Isometrie, falls $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\|x - y\| = \left\|x' - y'\right\| = \|mx - my\| .$$

Bem.: Jede (euklidische) Isometrie ist eine Komposition von Translation, Drehung und Spiegelung.

Inhalt

ulm university universität uulm

Funktional

Eine Abbildung h: $C(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$, die jeder kompakten, konvexen Menge eine reelle Zahl zuordnet, nennen wir Funktional auf der Menge der konvexen Körper.

Uns interessieren positive Funktionale h, die für $K, K_1, K_2 \in C(\mathbb{K})$ folgende Eigenschaften erfüllen:

- Isometrie-Invarianz:

$$h(mK) = h(K) \quad \forall K \in C(\mathbb{K}),\ m \text{ Isometrie}$$

- Monotonie:

$$K_1 \subseteq K_2 \ \Rightarrow\ h(K_1) \leq h(K_2)$$

- Additivität:

$$K_1 \cup K_2 \in C(\mathbb{K}) \ \Rightarrow\ h(K_1 \cup K_2) = h(K_1) + h(K_2) - h(K_1 \cap K_2),$$

wobei $h(\emptyset) = 0$

Satz von Steiner

Für jedes $K \in C(\mathbb{K})$ gibt es Zahlen $V_0(K), \ldots, V_d(K) \geq 0$, so dass

$$\nu_d(K \oplus B(0,r)) = \sum_{k=0}^{d} b_{d-k} V_k(K)\, r^{d-k} \quad \forall r \geq 0,$$

wobei b_l das l-Volumen der l-dim. Einheitskugel ist.

$\Rightarrow$ $V_k(K)$ sind die inneren Volumina.

Steiner für d = 1,2,3

- d = 1: $l(K \oplus B(0,r)) = l(K) + 2r$
- d = 2: $A(K \oplus B(0,r)) = A(K) + U(K)\, r + \pi\, r^2$
- d = 3:

$$V(K \oplus B(0,r)) = V(K) + S(K)\, r + 2\pi \overline{b}(K)\, r^2 + \frac{4}{3}\pi\, r^3,$$

wobei l die Länge, A der Flächeninhalt, U der Umfang, V das Volumen, S die Oberfläche und $\overline{b}$ die mittlere Breite ist.

Eigenschaften der inneren Volumina

Eigenschaften der inneren Volumina:

- V_k sind Funktionale auf $C(\mathbb{K})$
- Isometrie-Invarianz
- Monotonie
- Additivität
- V_k homogen vom Grade k, d.h.

$$V_k(\lambda K) = \lambda^k \, V_k(K), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$$

innere Volumina, Minkowski-Funktionale

Es gilt:

- $V_d(K)$ Volumen von $K \in C(\mathbb{K})$
- $2V_{d-1}(K)$ Oberfläche von $K \in C(\mathbb{K})$
- Minkowski-Funktionale $W_k,\ k = 0, \ldots, d$:

$$b_{d-l}\ V_l(K) = \binom{d}{l} W_{d-l}(K), \quad l = 0, 1, \ldots, d,\ K \in C(\mathbb{K})$$

Die Minkowski-Funktionale sind gegeben durch ...

Minkowski-Funktionale

$$W_k(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{L_k} \nu_{d-k}(\mathbf{p}_{S^\perp} K)\, U_k(dS)$$

- $b_l = \frac{\sqrt{\pi^l}}{\Gamma(1+\frac{l}{2})}$ Volumen der l-dim. Einheitskugel
- ν_l l-dim. Lebesgue-Maß
- L_l Menge aller l-dim. Unterräume des $\mathbb{R}^d$
- $\mathbf{p}_{S^\perp}$K orth. Proj. von K auf den (d-l)-dim. Unterraum senkrecht zu $S \in L_l$
- U_l Gleichverteilung auf L_l

Inhalt

Der konvexe Ring

- konvexer Ring $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \left\{ A \subset \mathbb{R}^d : \; A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \; \text{ für } K_1, \ldots, K_n \in C(\mathbb{K}), \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

- Fortsetzung der inneren Volumina auf $\mathcal{R}$:

$$V_k(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \left(\sum_{1 \leq m_1 < \ldots < m_i \leq n} V_k(K_{m_1} \cap \ldots \cap K_{m_i}) \right),$$

wobei $A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \; \in \mathcal{R}, \; K_i \in C(\mathbb{K})$ eine Zerlegung von A

innere Volumina auf $\mathcal{R}$

Verallgemeinerte innere Volumina:

$$V_k(A) = \binom{d}{k} \frac{b_d}{b_{d-k} b_k} \int_{L_{d-k}} \int_{S^\perp} \varphi(A \cap S_s)\, \nu_k(ds)\, U_{d-k}(dS),$$

wobei φ Euler-Charakteristik, $A \in \mathcal{R},\ k = 0, \dots, d$.

- $V_d(A)$ ist das Volumen von $A \in \mathcal{R}$
- $2V_{d-1}(A)$ ist die Oberfläche von $A \in \mathcal{R}$
- $V_0(A)$ ist die Euler-Charakteristik von A

Satz von Hadwiger

Jedes Isometrie-invariante, monotone und additive Funktional h auf $\mathcal{R}$ ist von der Form:

$$h(A) = \sum_{k=0}^{d} c_k V_k(A) \quad \forall A \in \mathcal{R},$$

wobei c_k nicht-negative, von h abhängige Konstanten sind.

Bsp.: f isotropes Zufallsfeld auf $\mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}$. Mit

$$\widetilde{\psi}_u(A) = \mathbb{E}(\varphi(A_u(f, A)))$$

(φ Euler-Charakteristik, A_u Exkursionsmenge) gilt:

$$\mathbb{P}(\sup_{t \in A} f(t) > u) = \widetilde{\psi}_u(A) + o(\widetilde{\psi}_u(A))$$

und $\widetilde{\psi}_u$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Hadwiger.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\sup_{t \in A} f(t) > u) = \sum_{k=0}^{d} c_k(u)\ V_k(A)\ + o(\widetilde{\psi}_u(A))$$

Literatur

R. Adler und J. Taylor
Random Fields And Geometry
Springer, Berlin, 2007

D. Stoyan, W.S. Kendall und J. Mecke
Stochastic Geometry And Its Applications
Wiley, 1987