Max-stabile Prozesse

Katharina Fröhlich & Thomas Zeibig

Seminar Zufällige Felder
Universität Ulm

1. März 2009

Inhalt

Motivation

- Alternativer Zugang zu multivariaten Extremwertverteilungen
- Menge der Beobachtungsstellen ist groß

$\Rightarrow$Verwendung z.B. in der Hydrology:

  - Wie sind Stürme über einem Gebiet verteilt und wo sind die größten Schäden zu erwarten ?
  - Wie hoch muss ein Damm/Deich gebaut werden um ausreichend Schutz zu gewähren ?
  - Wie hängt der maximale Pegelstand eines Flusses mit dem Wasserstand seiner Zuflüsse zusammen ?

Kapitel 2

Max-stabile Prozesse

Definition

Seien X_1,X_2, ... eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F. Sei

$$M_N := \max_{1 \leq i \leq N} X_i$$

Eine Verteilungsfunktion G heißt *Extremwertverteilungsfunktion*, falls Konstanten a_N>0, $b_N \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$P\left(\frac{M_N - b_N}{a_N} \leq x\right) = F^N(a_N x + b_N) \overset{N \to \infty}{\to} G(x)$$

Die 3 Typen der EWV

Wenn G eine Extremwertverteilungsfunktion ist, dann gehört sie zu einem der drei folgenden Typen

1. *Fréchet*-Verteilung

$$\Phi_\alpha(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases}$$

2. *Gumbel*-Verteilung

$$G_0(x) = exp(-e^{-x})$$

3. *Weibull*-Verteilung

$$\Psi_\alpha(x) := \begin{cases} exp(-(-x)^\alpha), & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Definition

Seien $Z^{(1)}$,$Z^{(2)}\dots$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvektoren mit

$$Z^{(i)} := \left(X_1^{(i)}, \dots, X_m^{(i)}\right) \quad m \in \mathbb{N}$$

Sei

$$\max_{1 \le i \le N} Z^{(i)} := \left(M_{1N}, \dots, M_{mN}\right) \text{ wobei } M_{jN} := \max_{1 \le i \le N} X_j^{(i)}.$$

Eine Verteilungsfunktion G heißt *multivariate Extremwertverteilungsfunktion* falls eine Folge von Konstanten $a_{jN}>0$, $b_{jN} \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$P\left(\tfrac{M_{1N}-b_{1N}}{a_{1N}} \le x_1, \dots, \tfrac{M_{mN}-b_{mN}}{a_{mN}} \le x_m\right)$$

$$= F^N\left(a_{1N}x_1 + b_{1N}, \dots, a_{mN}x_m + b_{mN}\right) \stackrel{N\to\infty}{\to} G(x_1, \dots, x_m)$$

Definition

Sei $\{Y_t, t \in T\}$ ein stochastischer Prozess, T eine beliebige Indexmenge, $\{Y_t^{(1)}, t \in T\}, \ldots, \{Y_t^{(N)}, t \in T\}$ N unabhängige Kopien des Prozesses.
$\{Y_t,\ t \in T\}$ heißt *max-stabil*, falls für $N \geq 1, t \in T$ Konstanten $A_{Nt} > 0, B_{Nt} \in \mathbb{R}$ existieren, so dass mit

$$Y_t^* := \frac{\max_{1 \leq n \leq N} Y_t^{(n)} - B_{Nt}}{A_{Nt}} \quad \forall t \in T$$

gilt:

$$\{Y_t^*, t \in T\} \stackrel{d}{=} \{Y_t, t \in T\}$$

Bemerkungen

- Falls für die Indexmenge T gilt: $|T| < \infty$ entspricht die Definition genau der Definition einer multivariaten Extremwertverteilung(für Maxima)
- Falls für die Indexmenge T gilt: $|T| = 1$ reduziert es sich weiter zu den klassischen 3 Typen der Extremwertverteilung von Fisher & Tippet

$\Rightarrow$Die Klasse der max-stabilen Prozesse ist äquivalent zur Klasse der Extremwertprozesse

- Da wir wissen, dass sich die 3 Typen der Extremwertverteilung ineinander transformieren lassen, werden wir ab jetzt o.B.d.A annehmen, dass die Randverteilungsfunktionen $Standard - Fréchet$ Gestalt haben (d.h. $\alpha = 1$), d.h.

$$P\Big(Y_t \leq y\Big) = e^{-\frac{1}{y}} \quad \forall t$$

Konstruktion

- Mögen $\{(\xi_i, s_i),\ i \geq 1\}$ die Punkte eines Poisson-Prozesses auf $(0, \infty) \times S$ mit Intensitätsmaß $\xi^{-2}\mathrm{d}\xi \times \nu(\mathrm{d}s)$ bezeichnen
- Sei S eine beliebige messbare Menge
- Sei ν ein positives Maß auf S
- Sei $\{$f(s,t), $s \in S, t \in T\}$ eine nicht-negative Funktion für die gilt:

$$\int\limits_S f(s,t)\,\nu(\mathrm{d}s) = 1 \quad \forall t \in T \tag{1}$$

$\Rightarrow$Wir definieren :

$$Y_t = \max_i \{\xi_i f(s_i, t)\} \quad t \in T \tag{2}$$

Interpretation

„Niederschlags/Sturm“-Interpretation

- S entspricht einem Raum von potentiellen Sturmzentren
- ν entspricht dem Maß der Verteilung der Sturmzentren über S
- Jedes ξ_i bezeichnet die Größe/das Ausmaß eines Sturms
- Funktion f entspricht der „Form“ des Sturmes

$\Rightarrow \xi_i f(s_i, t)$ entspricht der Niederschlagsmenge am Ort t bei einem Sturm mit seinem Sturmzentrum in/über s_i

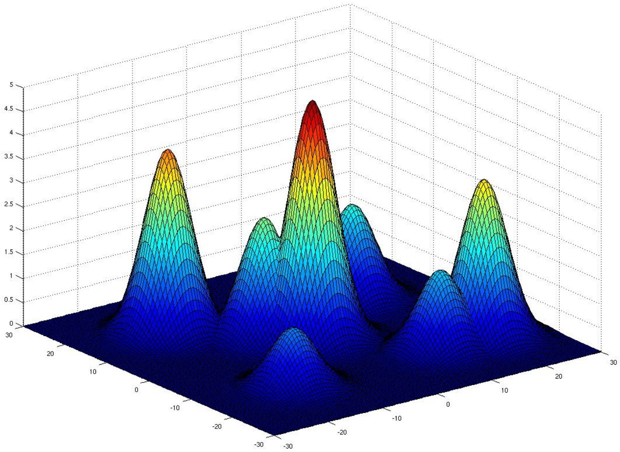

Abbildung: vereinfachte Simulation eines Extremwertprozesses

Erinnerung: Definition Wahrscheinlichkeitstheorie

Sei $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ die Familie aller beschränkten Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$ und sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto [0, \infty)$ ein beliebiges lokal-endliches Maß, d.h., $\mu(B) < \infty$ gilt für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$

- Man sagt, dass $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein (inhomogenes) *Poissonsches Zählmaß* mit dem *Intensitätsmaß* μ ist, wenn
  1. die Zufallsvariablen $N_{B_1}, N_{B_2}, \ldots$ unabhängig sind für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ und
  2. $N_B \sim$Poi$(\mu(B))$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$
- Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass das Intensitätsmaß μ proportional zum d-dimensionalen Lebesgue-Maß ν_d ist, d.h., für eine Konstante $\lambda < \infty$ gilt

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

  dann sagt man, dass $\{N_B\}$ ein *homogenes Poissonsches Zählmaß* mit der *Intensität* λ (bzw. kurz ein *homogener Poisson-Prozess*) im $\mathbb{R}^d$ ist.

Beweis für die Max-stabilität von Y_t

- Sei $y_t > 0$ fest für jedes t und betrachte die Menge

$$B = \{(\xi, s) : \exists t \in T \quad \xi f(s,t) > y_t\}$$

- Das Ereignis $\{Y_t \leq y_t \quad \forall t \in T\}$ tritt genau dann ein, wenn kein Punkt des Poisson-Prozesses in B liegt
- Also bestimmen wir das Intensitätsmaß der Menge B:

de Haan-Resnick Darstellung

Jede max-stabile Verteilungsfunktion G mit *Fréchet* Randverteilungsfunktionen $G_{1,\alpha}(x) = exp(-x^{-\alpha}), x > 0, \alpha > 0$ lässt sich wie folgt darstellen

$$G(x) = exp\left(- \int_{S_E} \max_{i \leq d} \left(\frac{a_i}{x_i} \right)^{\alpha} \mathrm{d}\phi(a) \right), \qquad x \in [0, \infty)$$

Fortsetzung

$\Rightarrow$ Jetzt können wir $P\Big(Y_t \leq y_t \quad \forall t \in T\Big)$ berechnen:

$$\begin{aligned} P\Big(Y_t \leq y_t \quad \forall t \in T\Big) &= P\Big(N_B = 0\Big) \\ &= \frac{\mu(B)^0}{0!} e^{-\mu(B)} \\ &= exp\left[-\int\limits_S \max_t \left\{\frac{f(s,t)}{y_t}\right\} \nu(\mathrm{d}s)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

$\overset{deHaan-Resnick}{\Rightarrow} \{Y_t,\ t \in T\}$ ist max-stabil

Bemerkung

- Die Randverteilungsfunktionen von Y_t haben $Standard - Fr\acute{e}chet$ Gestalt

$$P(Y_{t_1} \leq y_1, Y_t \leq \infty \forall t \in T \setminus \{t_1\})$$
$$\stackrel{(3)}{=} exp\left[- \int\limits_S \max_{t \in T \setminus \{t_1\}} \left\{ \frac{f(s,t_1)}{y_1}, \underbrace{\frac{f(s,t_2)}{\infty}}_{=0}, \right\} \nu(\mathrm{d}s) \right]$$

und da alle $y_t > 0$ und f nicht-negativ

$$= exp\left[- \int\limits_S \frac{f(s,t_1)}{y_1}\, \nu(\mathrm{d}s) \right] = exp\left[- \frac{1}{y_1} \underbrace{\int\limits_S f(s,t_1)\, \nu(\mathrm{d}s)}_{\stackrel{(1)}{=}1} \right] = e^{-\frac{1}{y_1}}$$

- Ab jetzt: Beschränkung auf den bivariaten Fall (Vereinfachung)
- Der Zufallsvektor (Y_{t_1}, Y_{t_2}) besitzt genau dann eine Extremwertverteilung, wenn sich die Verteilungsfunktion F darstellen lässt[1]

$$F(y_1, y_2) = exp\left[- \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \right) A\left(\frac{y_1}{y_1 + y_2} \right) \right] \tag{4}$$

wobei für $0 \leq \omega \leq 1$

$$A(\omega) = \int_0^1 \max\{(1-\omega)q, \omega(1-q)\} \mathrm{d}H(q)$$

hierbei ist H ein positives Maß auf $[0, 1]$

$A(\omega)$ heißt *Abhängigkeitsfunktion* der bivariaten Extremwertverteilung.

[1] Pickands, J. (1981)

Eigenschaften der Abhängigkeitsfunktion

Es gilt:

- $A(0) = A(1) = 1$
- $\max\{\omega, (1-\omega)\} \leq A(\omega) \leq 1$
- $A(\omega) = 1 \Rightarrow Y_{t_1}, Y_{t_2}$ sind unabhängig
  $A(\omega) = \max\{\omega, (1-\omega)\} \Rightarrow Y_{t_1}, Y_{t_2}$ sind abhängig
- $A(\omega)$ ist auf $[0, 1]$ eine konvexe Funktion

Beispiel

- Bekanntes bivariates Modell: „mixed model"
- Herleitung dieses Modells über den in (2) vorgestellten Ansatz der Max-Stabilität

Beispiel

- Für die Abhängigkeitsfunktion des "mixed model"gilt[2]:

$$A(\omega) = 1 - \phi\omega(1-\omega), \quad \phi = (1 - 1/\gamma)^2 \tag{5}$$

- Betrachte nun
  - $T = \{1, 2\}, S = [0, 1]$, ν das Lebesgue-Maß und $1/2 \leq \gamma \leq 1$
  - $$f(s,t) = \begin{cases} 2(\gamma - s)/\gamma^2 & \text{falls } 0 < s < \gamma,\ t = 1 \\ 2(s - 1 + \gamma)/\gamma^2 & \text{falls } 1 - \gamma < s < 1,\ t = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Es gilt also:

$$\int_0^1 \max\left\{\frac{f(s,1)}{y_1}, \frac{f(s,2)}{y_2}\right\} \mathrm{d}s = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_1 + y_2}\left(2 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 \tag{6}$$

[2] Tawn, J.A.(1988)

Beispiel(Fortsetzung)

$\Rightarrow$Wir wissen also aus (3),(4) und (6):

$$exp\left[-\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_1+y_2}\left(2-\frac{1}{\gamma}\right)^2\right)\right] \stackrel{!}{=} exp\left[-\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)A\left(\frac{y_1}{y_1+y_2}\right)\right]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A(\omega)=1-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^2\omega(1-\omega)$$

$\Rightarrow$Dies entspricht genau der Abhängigkeitsfunktion des "mixed model"

Kapitel 3

Der Gaußsche Extremwertprozess

Definition

- $S = T = \mathbb{R}^d, \; \nu$ das Lebesgue-Maß
- f habe folgende Gestalt

$$f(s,t) = f_0(s-t) = (2\pi)^{-d/2} |\sum|^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}(t-s)^T \sum^{-1} (t-s) \right]$$

$\Rightarrow$ f (als Funktion von t bei festen s) ist die Dichte eines multivariat-normalverteilten Zufallsvektor mit Erwartungswert(vektor) s und mit Kovarianzmatrix $\sum$

$\Rightarrow$ Bedingung (1) ist erfüllt und der Prozess damit max-stabil und heißt *Gaußscher Extremwertprozess*

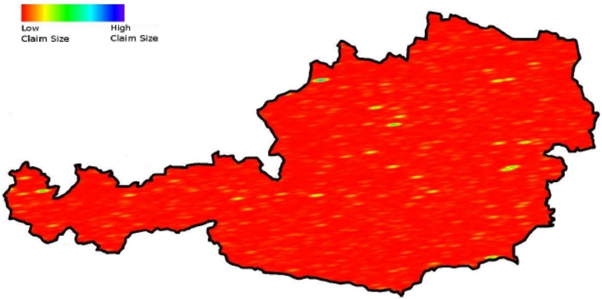

Abbildung: Simulation von maximalen Sturmschäden, modelliert mit einem Gauß-Extremwertprozess

Abhängigkeitsfunktion für Gauß EW-Prozess

- Wir wissen

$$P\Big(Y_t \leq y_t \quad \forall t \in T\Big) = exp\Big[-\int_S \max_t \Big\{\frac{f(s,t)}{y_t}\Big\}\, \nu(\mathrm{d}s)\Big]$$

$$= exp\Big[-\frac{1}{y_1}\Phi\Big(\frac{a}{2}-\frac{1}{a}log(\frac{y_2}{y_1})\Big)-\frac{1}{y_2}\Phi\Big(\frac{a}{2}-\frac{1}{a}log(\frac{y_1}{y_2})\Big)\Big]$$

wobei $a^2 = (t_1 - t_2)^T \sum^{-1}(t_1 - t_2)$

- Jetzt können wir die (bivariate) Abhängigkeitsfunktion bestimmen:

$$P\Big(Y_{t_1} \leq y_1,\ Y_{t_2} \leq y_2\Big) \stackrel{!}{=} exp\Big[-\Big(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\Big)A\Big(\frac{y_1}{y_1+y_2}\Big)\Big]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A(\omega) = (1-\omega)\Phi\Big(\frac{a}{2}+\frac{1}{a}log(\frac{1-\omega}{\omega})\Big)+\omega\Phi\Big(\frac{a}{2}+\frac{1}{a}log(\frac{\omega}{1-\omega})\Big)$$

t-Extremwertprozess

Motivation:

- *t*-Extremwertverteilung stellt Erweiterung zum Gausschen Extremwertprozess dar
- Sinnvoll, da die Verteilung der *t*-Verteilung „stärkeres/dickeres“ Verteilungsende hat

  $\Rightarrow$z.B. zur Verwendung von Stürmen mit anderem Profil

t-Extremwertprozess

- Sei S, T und ν wie bisher
- Ersetze die Normalverteilungsdichte f_0 durch die Dichte einer multivariaten t-Verteilung

$$\tilde{f}_0(x) = |\sum|^{-1/2}(\pi r)^{-d/2}\frac{\Gamma(r/2)}{\Gamma((r-d)/2)}\left(1+\frac{x^T\sum^{-1}x}{r}\right)^{-r/2}$$

gültig $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\sum$ ist wieder eine positiv definite Kovarianzmatrix und $r > d$

$\Rightarrow$Der daraus resultierende max-stabile Prozess heißt *t-Extremwertprozess*

ulm university universität ulm

- In diesem Fall ist die Berechnung der Verteilung noch schwieriger als im Gaußschen Fall
  ⇒Es ergibt sich für die gemeinsame Verteilung an zwei Stellen t_1 und t_2:

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{1 + B\left(\frac{a^2}{a^2+4r^2}; \frac{1}{2}; \frac{r-d}{2}\right)\right\}$$

  wobei a wie im Gauss-Fall und B die unvollständige Betafunktion

$$B(y,\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^y u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,\mathrm{d}u, \quad 0 \leq y \leq 1$$

  ist

Kapitel 4

Anwendung auf räumliche Daten

Zielstellung

- Wir betrachten nun die Anwendung der vorgestellten Ideen/Konzepte auf einen Satz räumlicher Daten
- Datensatz besteht aus jährlichen Maxima(z.B. Niederschlagsmenge), die innerhalb einer bestimmten Periode an einer Menge verschiedener Stellen genommen wurden

Schritt 1

- Ann.: Maxima sind (näherungsweise) max-stabil verteilt
- Die Parameter der Verallgemeinerten Extremwertverteilung

$$F(x, \mu, \sigma, \xi) = exp\left[- \left(1 - \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} \right)^{1/\xi} \right]$$

werden an jedem Ort geschätzt und anschließend wird die Transformation

$$y = \left(1 - \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} \right)^{-1/\xi}$$

benutzt/durchgeführt

- Die Schätzungen erfolgen nach der Maximum-Likelihoodmethode

$\Rightarrow$Wir werden ab jetzt annehmen, dass die Daten an der Stelle t_i $(i = 1, \ldots, p)$ aus standardisierten Beobachtungen $\left(Y_{ni},\ 1 \leq n \leq N\right)$ mit $Standard - Fr\acute{e}chet$-Randverteilungen bestehen

Definition

Möge der Zufallsvektor (X_1, X_2) eine bivariate Extremwertverteilung mit Randverteilungsfunktion F besitzen. Dann ist der *Extremalkoeffizient* zwischen X_1 und X_2 durch die Relation

$$P\Big(\max\left(X_1, X_2\right) \leq x\Big) = F^{\theta}(x)$$

definiert.

Es existiert eine (offensichtliche) Erweiterung des Konzeptes des Extremalkoeffizienten auf mehr als zwei (Zufalls)Variablen:
Der Extremalkoeffizient zwischen k extremwertverteilten Variablen $X_1, \ldots X_k$ mit Randverteilungsfunktion F ist durch die Relation

$$P\Big(\max\left(X_1, \ldots, X_k\right) \leq x\Big) = F^{\theta}(x)$$

definiert.

Bemerkungen

- Die theoretische Reichweite des Extremalkoeffizienten zwischen zwei Variablen ist

$$1 \leq \theta \leq 2$$

- Die Fälle $\theta = 1$ bzw. $\theta = 2$ entsprechen den Fällen der perfekten Abhängigkeit bzw. der Unabhängigkeit

- Durch die Abhängigkeitsfunktion ausgedrückt ergibt sich:

$$\theta = 2A(1/2)$$

Bemerkung

- Wir benutzen den Extremalkoeffizienten, weil das Verwenden des Korrelationskoeffizienten in der Extremwerttheorie nicht immer günstig ist:
  - außerdem haben einige der betrachteten Fälle keine endliche Varianz, z.B. gilt, wenn X *Fréchet*-verteilt ist:

$$Var(X) = \begin{cases} \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2 & \text{falls } \alpha > 2 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

  wir arbeiten mit Randverteilungsfunktionen mit $Standard - Fréchet$-Gestalt
  $\Rightarrow \alpha = 1$

Schätzung des Extremalkoeffizienten

- Falls die Randverteilungen von (X_1, X_2) $Standard - Fr\acute{e}chet$ sind, gilt: $1/X_1 \sim Exp(1)$ und $1/X_2 \sim Exp(1)$, denn

$$P\left(1/X_1 \leq x\right) = P\left(X_1 \geq 1/x\right) = 1 - \underbrace{P\left(X_1 \leq 1/x\right)}_{=e^{-\frac{1}{1/x}}} = 1 - e^{-x}$$

- Ähnlich ergibt sich $1/\max(X_1, X_2) \sim Exp(\theta)$

$\Rightarrow$ Daraus ergibt sich ein natürlicher Schätzer für den Extremalkoeffizienten zwischen zwei Stellen i und j

$$\tilde{\theta}_{ij} = N/\left\{\sum_{n=1}^{N} \min\left(Y_{ni}^{-1}, Y_{nj}^{-1}\right)\right\}$$

Schätzung des Standardfehlers für jedes $\tilde{\theta}_{ij}$

- Für die vorliegende Untersuchung wurde der Jackknife-Schätzer[3] für den Standardfehler benutzt
  $\Rightarrow$Es ergibt sich folgende Formel für den Standardfehler s_{ij}:

$$s_{ij} = \left\{ \frac{N-1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\tilde{\theta}_{ij}^{(n)} - \tilde{\theta}_{ij} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

  wobei $\tilde{\theta}_{ij}^{(n)}$ die Schätzung ist, die man aus der n-ten Jackknife-Stichprobe erhält, bei der die Daten aus dem n-ten Jahr nicht berücksichtigt werden

[3] Efron, B.(1982)

Anpassung eines max-stabilen Modells an die $\tilde{\theta}'_{ij}s$

- Der hier vorgestellte Algorithmus basiert auf der Summe der gewichteten Residuen
- Dabei werden die gewichteten Residuen r_{ij} durch

$$r_{ij} = (\tilde{\theta}_{ij} - \hat{\theta}_{ij})/s_{ij}$$

  definiert, wobei
  - $\hat{\theta}_{ij}$ der angepasste Modellwert
  - $\tilde{\theta}_{ij}$ der in Schritt 2 berechnete Schätzer des Extremalkoeffizienten und
  - s_{ij} der in Schritt 3 berechntete Standardfehler

  ist
- Die Modellparameter werden dabei so gewählt, dass:

$$\sum_{i,j} {r_{ij}}^2 \to \text{min}$$

Test der Modellanpassung

Wir möchten jetzt eine Methode zum Test der Modellanpassung vorstellen:

- Untersuche die gewichteten Residuen aus Schritt 4 auf
  - außerhalb liegende Werte
    oder
  - ein systematisches Anzeichen für nichtzufälliges Verhalten

  z.B. durch das Gegeneinanderplotten von Residuen und angepassten Werten oder andere Variablen wie etwa die Entfernung zwischen den einzelnen Stellen

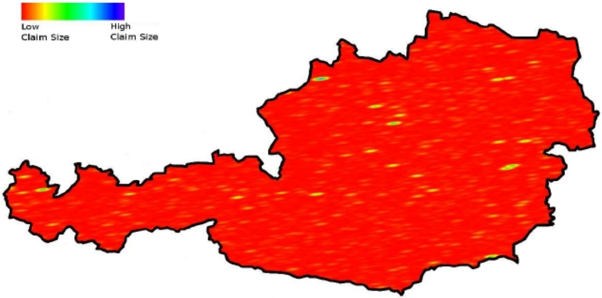

Abbildung: Simulation von maximalen Sturmschäden, modelliert mit einem Gauß-Extremwertprozess

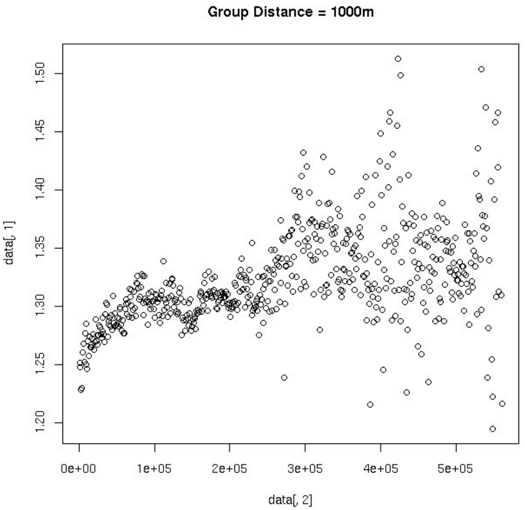

Abbildung: geschätzter Extremalkoeffizient

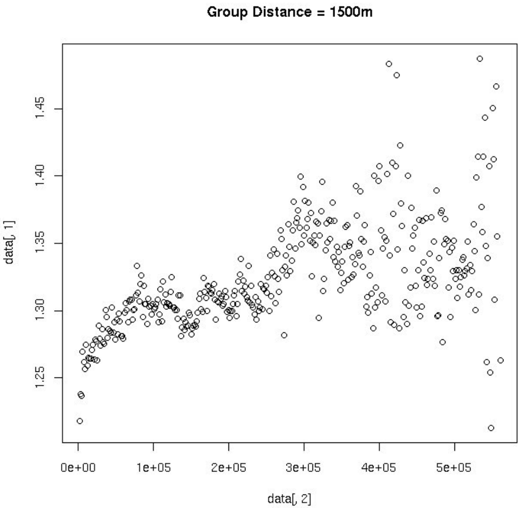

Abbildung: geschätzter Extremalkoeffizient

Literatur

R.L. Smith
Max-Stable Processes And Spatial Extremes
unveröffentlicht, 1990

J.A. Tawn
Bivariate Extreme Value Theory - Models and Estimations
Biometrika, 75:397–415, 1988.

J. Pickands
Multivariate Extreme Value Distributions
Bull. Int. Statist. Inst., 49:859-878, 1981

B. Efron
The Jackknife, The Bootstrap And Other Resampling Plans
CBMS-NSF Regional Conference Series In Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1982

V. Schmidt
Vorlesungsskript Wahrscheinlichkeitstheorie
Stand: Sommersemester 2006

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !!!