Überschreitungswahrscheinlichkeiten

Stefan Roth

Seminar Zufällige Felder
Universität Ulm

11. Februar 2009

Inhalt

Definition und Problemstellung

- Sei $\{f_t\}$ ein Gauß-Prozess über dem Parameterraum T. Dann heißt

  $$P(\sup_{t\in T} f_t \geq u);\;\; u \in \mathbb{R}$$

  Überschreitungswahrscheinlichkeit

- Ziel ist es nun für oben genannte Wahrscheinlichkeit Schranken zu finden bzw. Näherungen für "große"u.

ulm university universität uulm

Inhalt

Wichtige Begriffe

- Sei (T, d) ein kompakter metrischer Raum
- Sei $\{X_t; t \in T\}$ ein stochastischer Prozess mit $E((X_t)^2) < \infty, \ \forall t \in T$
- Die Pseudometrik $d(s,t) := \sqrt{E((X_s - X_t)^2)}, \ s, t \in T$, heißt kanonische Metrik

- Sei $\varepsilon > 0$. Die Funktion

$$N(\varepsilon) := min\{n \in \mathbb{N};\ T \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} B(t_i, \varepsilon);\ t_i \in T\ \forall i = 1, ..., n\}$$

heißt Entropiefunktion von T. Dabei ist
$B(t, \varepsilon) := \{s \in T; d(t, s) \leq \varepsilon\}$

- Einen stochastischen Prozess $\{f_t;\ t \in T\}$ nennt man Gauss-Prozess, falls seine endlich dimensionalen Verteilungen (multivariate) Normalverteilungen sind.

Borell-TIS Ungleichung

- Sei $\{f_t\}$ ein zentrierter Gauß -Prozess
- $\{f_t\}$ f.s. beschränkt auf T
- $||f|| := ||f||_T := \sup_{t \in T} f_t$

Dann gilt:

1. $E(||f||) < \infty$
2. $P(||f|| - E(||f||) > u) \leq e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}, \ \forall u > 0$

wobei $\sigma_T^2 := \sup_{t \in T} E(f_t^2)$.

Inhalt

Theorem 1

- Sei $\{f_t\}$ ein zentriertes, f.s. stetiges Gauß-Feld auf T
- Sei $\{f_t\}$ f.s. beschränkt auf T
- $N(\varepsilon)$ sei die Entropiefunktion von T
- $N(\varepsilon) \leq K \cdot \varepsilon^{-\alpha} (*)$

Dann gilt für u genügend groß

$$P(||f|| \geq u) \leq C_\alpha u^{\alpha+\eta} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}$$

für jedes $\eta > 0$, wobei $C_\alpha = C(K, \alpha, \sigma_T^2) < \infty$ eine Konstante.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$.

- Definiere

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \mu(t,\varepsilon) := E(\sup_{s \in B_d(t,\varepsilon)} f_s) \\ &\text{(ii)} \quad \mu(\varepsilon) := \sup_{t \in T}\{\mu(t,\varepsilon)\} \end{aligned}$$

  Dabei sei $B_d(t,\varepsilon)$ die Kugel um t mit Radius ε bzgl. der kanonischen Metrik d.

- Mit der Borell-TIS Ungleichung gilt:

$$(**)\ P(||f|| \geq u) \leq N(\varepsilon) e^{-\frac{(u-\mu(\varepsilon))^2}{2\sigma_T^2}}, \ \forall \underline{u > \mu(\varepsilon)}$$

- denn: $P(||f|| \geq u) = P(\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)}\{\sup_{s \in B(t_i,\varepsilon)} f_s \geq u\})$

$$\leq \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P(\sup_{s \in B(t_i,\varepsilon)} f_s \geq u)$$

$$= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P(\sup_{s \in B(t_i,\varepsilon)} f_s - \mu(t_i,\varepsilon) \geq u - \mu(t_i,\varepsilon))$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P(\sup_{s \in B(t_i,\varepsilon)} f_s - \mu(t_i,\varepsilon) \geq u - \mu(\varepsilon))$$

$$\overset{B-TIS}{\leq} \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} e^{\frac{(u-\mu(\varepsilon))^2}{2\sigma_T^2}} \quad \forall\, u > \mu(\varepsilon)$$

$$= N(\varepsilon) e^{\frac{(u-\mu(\varepsilon))^2}{2\sigma_T^2}} \quad \forall\, u > \mu(\varepsilon)$$

- Man kann zeigen:
  $\mu(t,\varepsilon) \leq C_1(\alpha) \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{log(\frac{1}{\varepsilon})}$
- Setze $\varepsilon := u^{-1}$ und wähle u sodass $\underline{u > C_1(\alpha)u^{-1}\sqrt{log(u)}}$.
  $\overset{(**)}{\Rightarrow} P(||f|| \geq u) \leq K \cdot u^{\alpha} \cdot e^{C_2(\alpha)\sqrt{log(u)}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}; \ (***)$
  mit $C_2(\alpha) := \frac{C_1(\alpha)}{\sigma_T^2}$

- Sei $\eta > 0$ beliebig. Dann wähle u groß genug, sodass $\underline{u^\eta > e^{C_2(\alpha)\cdot\sqrt{log(u)}}}$, dann folgt mit $(***)$:

$$P(||f|| \geq u) \leq C_\alpha \cdot u^{\alpha+\eta} \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma_T^2}}$$

also die Behauptung.

Theorem 2

- Falls für ein $A > \sigma_T$, ein $\alpha > 0$, und ein $\varepsilon_0 \in [0, \sigma_T]$

$$N(\varepsilon) \leq (\frac{A}{\varepsilon})^\alpha \ \ \forall \varepsilon < \varepsilon_0$$

Dann gilt $\forall u \geq \sigma_T^2 \cdot \frac{1+\sqrt{\alpha}}{\varepsilon_0}$

$$P(||f|| \geq u) \leq (\frac{KAu}{\sqrt{\alpha}\sigma_T^2})^\alpha \psi(\frac{u}{\sigma_T})$$

wobei K eine universelle Konstante ist.

Inhalt

Theorem 3

- $\{f_t\}$ zentrierter, f.s. beschränkter Gauß-Prozess auf T
- $t_0 \in T$ (der einzige) Punkt mit
$$E(f_{t_0}^2) = \sigma_T^2 = \sup_{t \in T} E(f_t^2)$$
- Für $\delta > 0$ sei
$$T_\delta := \{t \in T : E(f_t f_{t_0}) \geq \sigma_T^2 - \delta^2\}$$
- Gelte
$$\lim_{\delta \to 0} \frac{E(\sup_{t \in T_\delta} f_t)}{\delta} = 0$$

Dann gilt:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{P(\sup_{t \in T} f_t \geq u)}{\psi(\frac{u}{\sigma_T})} = 1,$$

wobei ψ die Tailfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Beweisidee

- Es gilt:

$$P(||f_t|| \geq u) \geq P(f_{t_0} \geq u) = \psi(\frac{u}{\sigma_T})$$

das heißt, es genügt zu zeigen:

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{P(||f|| \geq u)}{\psi(\frac{u}{\sigma_T})} = 1$$

- Sei $\eta \in (0,\ 1)$ und $\delta_0 > 0$ klein genug, sodass $\forall\ \delta \leq 2\delta_0$ gilt:

$$\Rightarrow E(\sup_{t\in T_\delta} f_t) \leq \eta^2\delta \quad (*)$$

[möglich, da nach Voraussetzung $\lim_{\delta\to 0} \frac{E(\sup_{t\in T_\delta} f_t)}{\delta} = 0$].
O.B.d.A $\delta_0 \leq \sigma_T\eta^2$

- Außerdem gilt:

$$\sup_{t \notin T_{\delta_0}} E(f_t^2) < \sigma_T^2$$

[denn $t_0 \in T_\delta \; \forall \; \delta > 0$]

- Mit der Borell-TIS Ungleichung folgt:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{P(\sup_{t \in T \setminus T_{\delta_0}} f_t \geq u)}{\psi(\frac{u}{\sigma_T})} = 0$$

$\Rightarrow$ es genügt zu zeigen, dass

$$P(\sup_{t \in T_{\delta_0}} f_t \geq u) \leq \psi(\frac{u}{\sigma_T})(1 + K\eta)$$

für eine Konstante K und u "groß genug".

- Für festes u setze $\alpha := \frac{\sigma_T^2}{\eta u}$
- Definiere eine Folge von "Ringen"

$$V_{-1} := \emptyset;\ V_k := T_{2^k\alpha},\ U_k := V_k \setminus V_{k-1}\ \ \forall\, k \geq 0$$

- Dann existiert ein $p \in \mathbb{N}:\ 2^p\alpha \geq \delta_0$. Sei p o.B.d.A. minimal gewählt, dann gilt:

$$T_{\delta_0} \subset \bigcup_{0\leq k\leq p} U_k$$

- Setze $\mu_k := E(\sup_{t\in V_k} f_t)$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \mu_k \leq \alpha\eta^2 2^k\ \ \forall\, k \leq p$$

[für $k \leq p-1$ klar. Falls $k = p \Rightarrow \delta_0 \geq 2^{p-1}\alpha \Rightarrow 2\delta_0 \geq 2^p\alpha$]

- Setze $\omega_k := \sup_{t \in V_k} (E(f_t - f_{t_0})^2)^{\frac{1}{2}}$
$$\Rightarrow \omega_k = \sup_{t \in V_k} KE(|f_t - f_{t_0}|) \leq KE(\sup_{t \in V_k} |f_t - f_{t_0}|)$$
$$\leq K\mu_k \leq K\alpha\eta^2 2^k$$

- Setze in einem Lemma (Adler/Taylor, Seite 79ff, Lemma 4.1.5.) $X := f_{t_0}$

$$\Rightarrow \text{Abschätzung für } P(sup_{t \in U_0} f_t \geq u) \quad [\leq \psi(\tfrac{u}{\sigma_T})(...)]$$

  Für die restlichen U_k verwende ein ähnliches Argument mit $X_k := (\frac{1-(\alpha 2^{k-1})^2}{\sigma_T^2}) f_{t_0}$

- verwende eine elementare Ungleichung um ψ abzuschätzen
- Subbaditivität $\Rightarrow$ Behauptung

Inhalt

Beispiel

- $\{f_t\}$ zentriertes Gaußsches Zufallsfeld auf $\mathbb{R}^N$
- $f_0 = 0$ und
- $\{f_t\}$ habe stationäre und isotrope Zuwächse
- sei $p^2(t) := E((f_{t+s} - f_s)^2) = E(f_t^2)$ konvex
- Gelte

$$\lim_{t\to 0} \frac{p^2(t)}{|t|} = 0 \quad \text{(o)}$$

- sei $T := [0, s_1] \times ... \times [0, s_N]$ ein N-dimensionales Rechteck

Dann gilt

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(||f|| \geq u)}{\psi(\frac{u}{\sigma_T})} = 1$$

Beispiel - Wann sind die Bedingungen erfüllt

Fraktale Brownsche Bewegung

- $\{f_t\}$ zentrierter Gauss-Prozess auf $[0, T]$, $T \in \mathbb{R}$
- $f_0 = 0$
- Die Kovarianzfunktion von $\{f_t\}$ sei gegeben durch

$$C(s,t) = \frac{1}{2}(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha})$$

Dann heißt $\{f_t\}$ fraktale Brownsche Bewegung.
Wählt man dabei $\alpha > \frac{1}{2}$, so ist p^2 konvex.
Außerdem hat $\{f_t\}$ stationäre Zuwächse.

Beweis

- <u>Zur Konvexität:</u> Sei $\delta \in (0,\ 1)$ beliebig und $\alpha > \frac{1}{2}$, dann gilt:

  $$p^2((1-\delta)t + \delta s) = |(1-\delta)t + \delta s|^{2\alpha} \leq (1-\delta)^{2\alpha}|t|^{2\alpha} + \delta^{2\alpha}|s|^{2\alpha}$$
  $$\overset{\alpha > \frac{1}{2}}{<} (1-\delta)|t|^{2\alpha} + \delta|s|^{2\alpha} = (1-\delta)p^2(t) + \delta p^2(s)\ \forall\ s,t \in [0,\ T]$$

  $\Rightarrow p^2$ strikt konvex.

- <u>Bedingung (o):</u> $E(f_t) = 0\ \forall\ t \in [0,\ T]$
  $\Rightarrow Cov(f_t, f_s) = E(f_t f_s) = \frac{1}{2}(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha})$
  $\Rightarrow p^2(t) = E(f_t^2) = \frac{1}{2}(|t|^{2\alpha} + |t|^{2\alpha}) = |t|^{2\alpha}$
  $\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{p^2(t)}{|t|} = \lim_{t \to 0} |t|^{2\alpha - 1} \overset{\alpha > \frac{1}{2}}{=} 0$
  $\Rightarrow$ (o)

Literatur

R. Adler und J. Taylor
Random Fields And Geometry
Springer, Berlin, 2007