Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück

WS 2008/2009
20.10.2008

Übungen zu Räumliche Statistik - Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0, \infty)$.

(a) Sei $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$. Zeige, dass der erwartungstreue Schätzer

$$\hat{\lambda}_{W_n} = \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)}$$

für λ schwach konsistent ist, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0.$$

(b) Zeige, dass darüber hinaus für jede solche Folge $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Zufallsvariable

$$\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\lambda}}(\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda)$$

asymptotisch normalverteilt ist.

(c) Für jedes $n \geq 1$ seien die Mengen $L_n, U_n \subset \mathbb{R}^d$ jeweils die Vereinigung von endlich vielen $d-$dimensionalen Würfeln der Seitenlänge $\delta > 0$, die sich nicht überlappen. Ferner erhalte man für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen L_{n+1} und U_{n+1}, indem zu L_n bzw. U_n endlich viele dieser Würfel hinzugefügt werden. Es sei nun $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern, so dass $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$ und zusätzlich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$L_n \subset W_n \subset U_n \text{ sowie } \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_d(L_n)}{\nu_d(W_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_d(U_n)}{\nu_d(W_n)} = 1.$$

Zeige, dass dann $\hat{\lambda}_{W_n}$ stark konsistent ist, d.h., mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt $\lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}_{W_n} = \lambda$.

Aufgabe 2 Transformation gleichverteilter Zufallsvariablen

(a) Sei $\lambda > 0$ und $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und auf dem Intervall $(0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Zeige, dass die Zufallsvariablen $\frac{-\log U_1}{\lambda}, \frac{-\log U_2}{\lambda}, \ldots$ unabhängig und exponentialverteilt sind mit Parameter λ.

(b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ. Zeige, dass

$$Y = \max\{k \geq 0 :\ X_1 + \ldots + X_k \leq 1\}$$

eine Poisson-Verteilung mit Parameter λ hat.

Aufgabe 3

Schreibe ein Programm, das die Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses $\{N_B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ mit Intensität λ auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W \subset \mathbb{R}^2$ erzeugt. Die poissonverteilten Pseudozufallszahlen sollen dabei mit dem aus Aufgabe 2 resultierenden Algorithmus erzeugt werden. Für die Simulation von gleichverteilten Pseudozufallszahlen können die entsprechenden Methoden der Programmiersprachen verwendet werden. Visualisiere eine Realisierung eines Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda = 0.01$ auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$.

Für die Implementierung kann Java, C++ oder R verwendet werden. Die Visualisierung lässt sich komfortabel in R realisieren.