Prof. Dr. Volker Schmidt — WS 2008/2009
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück — 27.10.2008

Übungen zu Räumliche Statistik - Blatt 2

Präsentation der Lösungen: Donnerstag, 06.11.08

Aufgabe 1

Beweise die sogenannte Independent-Thinning-Eigenschaft des Poisson-Prozesses, d.h. zeige: Wenn jeder der Punkte $\{S_n\}$ eines Poisson-Prozesses auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität λ aufgrund einer Folge unabhängiger Bernoulli-Experimente gelöscht oder erhalten wird, erhält man einen Poisson-Prozess mit Intensität $p\lambda$. Dabei bezeichnet p die Erhaltungswahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

Für diese Aufgabe soll das Programm aus Blatt 1, Aufgabe 3, verwendet bzw. erweitert werden.

(a) Wir betrachten einen homogenen Poisson-Prozess $\{N_B : \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ mit Intensität $\lambda_0 = 0.001$. Generiere für die Beobachtungsfenster $W = [0, m]^2$, wobei $m = 100$, $m = 300$ und $m = 500$, jeweils 100 Realisierungen $t_1, \ldots, t_{100}$ der Testgröße

$$T = \sqrt{\frac{\nu_2(W)}{\hat{\lambda}_W}}(\hat{\lambda}_W - \lambda_0),$$

wobei $\hat{\lambda}_W = \frac{N_W}{\nu_2(W)}$. Prüfe für alle drei Werte von m mit Hilfe eines Shapiro-Wilk-Tests zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die Hypothese abzulehnen ist, dass $t_1, \ldots, t_{100}$ Realisierungen von $N(0, 1)$-verteilten Stichprobenvariablen sind.

(b) Wir betrachten einen MC-Rangtest zur Verifizierung des Hypothesenpaars

$$H_0 : \ \lambda = \lambda_0 \text{ vs. } H_1 : \ \lambda \neq \lambda_0$$

zum Niveau $\alpha = 0.05$. Der Test möge auf 100 Realisierungen $t_0, t_1, \ldots, t_{99}$ der Testgröße T beruhen. Dabei ergeben sich $t_1, \ldots, t_{99}$ aus Realisierungen eines Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda_0 = 0.001$, während sich t_0 aus einer Realisierung eines Poisson-Prozesses mit Intensität λ errechnet. Die empirische Gütefunktion $\alpha(\lambda)$ des Tests ist definiert als

$$\alpha(\lambda) = \frac{\sharp\{k : \rho_0^{(k)} > 95\}}{n},$$

wobei n die Anzahl der Testläufe und $\rho_0^{(k)}$ den Rang von t_0 im k-ten Testlauf bezeichnet. Der Rang von t_0 ist dabei als die Position zwischen 1 und 100 definiert, die $|t_0|$ einnimmt, wenn alle Beträge $|t_0|, |t_1|, \ldots, |t_{99}|$

aufsteigend geordnet werden.
Simuliere für $\lambda \in \{0.001, 0.002, \ldots, 0.009, 0.01\}$ die Werte der empirischen Gütefunktion. Führe dazu für jeden Wert λ jeweils 100 Testläufe auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$ durch.

(c) Wie ändern sich die Werte der empirischen Gütefunktion, wenn das Fenster $W = [0, 1000]^2$ betrachtet wird?

Für den Shapiro-Wilk-Test kann die entsprechende Funktion `shapiro.test` in `R` verwendet werden.

Aufgabe 3

Sei N ein zufälliges Zählmaß im $\mathbb{R}^d$. Der Operator

$$L_N(f) = \mathbb{E} \exp[-\int_{\mathbb{R}^d} f(x) N(dx)]$$

auf der Menge der Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ heisst das Laplace-Funktional von N. Dabei benutzen wir die Schreibweise $N(dx) = N_{dx}$. Man kann zeigen, dass zwei zufällige Zählmaße N und N' genau dann die gleiche Verteilung haben, wenn $L_N(f) = L_{N'}(f)$ für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit kompaktem Träger gilt. Eine Funktion f hat einen kompakten Träger, wenn die Menge $\{x : \ f(x) > 0\}$ in einem Kompaktum enthalten ist.
Zeige, dass ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ das Laplace-Funktional

$$L_N(f) = \exp[-\int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx)]$$

hat.