Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück WS 2008/2009
06.11.2008

Übungen zu Räumliche Statistik - Blatt 3

Präsentation der Lösungen: Donnerstag, 17.11.08

Aufgabe 1

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass

$$\mathbb{E}(N_B \mid N_{B'} = n) = n\frac{\mu(B)}{\mu(B')}$$

für beliebige $B, B' \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $B \subset B'$ und $0 < \mu(B') < \infty$.

Aufgabe 2

Seien $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ zwei Borel-messbare und lokal integrierbare Funktionen, so dass

$$\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Sei $\{S_n\}$ eine messbare Indizierung eines Poisson-Prozesses mit Intensitätsfunktion λ_1 und $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen, die von $\{S_n\}$ unabhängig ist. Zeige, dass $\{\widetilde{N}_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit

$$\widetilde{N}_B = \sharp\{n:\ S_n \in B, U_n \leq \lambda_2(S_n)/\lambda_1(S_n)\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein Poisson-Prozess mit der Intensitätsfunktion λ_2 ist.

Aufgabe 3

(a) Implementiere einen Algorithmus zur Simulation eines Poisson-Prozesses mit einer lokal beschränkten Intensitätsfunktion $\lambda : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ auf einem rechteckigen Beobachtungsfenster $W = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Dabei kann das Maximum der Funktion λ auf W der Prozedur als Parameter übergeben werden.

(b) Implementiere den Intensitätsschätzer

$$\hat{\lambda}_h(x) = \frac{N_{[x_1-\frac{h}{2},x_1+\frac{h}{2}]\times[x_2-\frac{h}{2},x_2+\frac{h}{2}]\cap W}}{\nu_2([x_1-\frac{h}{2},x_1+\frac{h}{2}]\times[x_2-\frac{h}{2},x_2+\frac{h}{2}]\cap W)}, \qquad x = (x_1, x_2).$$

Die Bandbreite $h > 0$ soll der Prozedur als Parameter übergeben werden.

(c) Generiere 10 Realisierungen eines Poisson-Prozesses mit der Intensitätsfunktion

$$\lambda(x_1, x_2) = 10^{-5} x_1 x_2 \text{ für } x_1, x_2 \in [0, 100]$$

auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$. Berechne für jede der 10 Realisierungen und $h = 35$ die Approximation

$$\tilde{e}_h = \frac{1}{100^2} \sum_{i,j=0}^{99} [\hat{\lambda}_h((i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})) - \lambda((i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}))]^2$$

des mittleren quadratischen Fehlers

$$\hat{e}_h = \frac{1}{\nu_2([0, 100]^2)} \int_{[0,100]^2} (\hat{\lambda}_h(x) - \lambda(x))^2 dx.$$