Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück
Dipl.-Math. oec. Jonas Rumpf

WS 2008/2009

17.11.2008

Übungen zu Räumliche Statistik - Blatt 4

Präsentation der Lösungen: Montag, 24.11.08

Aufgabe 1

Sei $\{\widetilde{S}_n\}$ eine messbare Indizierung eines homogenen Poissonschen Zählmaßes $\widetilde{N}$ mit Intensität λ_0. Dann bildet die Vereinigung $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\widetilde{S}_n, r)$ der zufälligen Kugeln $B(\widetilde{S}_n, r)$ mit Radius r und Mittelpunkt $\widetilde{S}_n$ eine zufällige Menge. Unter einem modulierten Poisson-Prozess versteht man ein zufälliges Zählmaß $N : \Omega \to \mathbb{N}$, für dessen bedingte Verteilungen gilt:

$$P(N \in A \mid \widetilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\widetilde{s}_n}) = P(N' \in A), \quad \forall A \in \mathcal{N},$$

wobei N' ein Poissonsches Zählmaß mit der Intensitätsfunktion

$$\lambda(x) = \lambda_1 1\!\!1_{\{x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B(\widetilde{s}_n, r)\}} + \lambda_2 1\!\!1_{\{x \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} B(\widetilde{s}_n, r))^c\}}$$

ist für $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Zeige, dass für $r \to \infty$ das zufällige Zählmaß N in Verteilung gegen ein Poissonsches Zählmaß mit Intensität λ_1 konvergiert.
Benutze ohne Beweis das Resultat, dass eine Folge von zufälligen Zählmaßen $\{N_n\}$ genau dann in Verteilung gegen ein zufälliges Zählmaß N' konvergiert, wenn die Folge $\{\mathbf{L_n}(f)\}$ der zugehörigen Laplace-Funktionale für alle $f \in \mathcal{H}$ gegen das Laplace-Funktional $\mathbf{L}(f)$ von N konvergiert.

Aufgabe 2

Wir betrachten einen Punktprozess $\{N_B\}$ mit messbarer Indizierung $\{S_i\}$ und Intensitätsfunktion $\lambda : W \to [0, \infty)$ auf dem Beobachtungsfenster $W = [0, \ell]^2 \subset \mathbb{R}^2$, $\ell > 0$. Sei $k : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ eine Kernfunktion,

$$\hat{g}(x) = \sum_{i=1}^{N_W} k\left(\frac{x - S_i}{h}\right), \ x = (x_1, x_2),$$

und

$$c = \sum_{i,j=0}^{\ell-1} \hat{g}((i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}))$$

eine Approximation des Integrals $\int_W \hat{g}(x)dx$. Wir betrachten nun folgenden Dichteschätzer für die Intensitätsfunktion λ an der Stelle $x \in W$:

$$\hat{\lambda}(x) = \frac{N_W}{c} \sum_{i=1}^{N_W} k\left(\frac{x - S_i}{h}\right)$$

(a) Implementiere den obigen Dichteschätzer für den Standardnormalverteilungskern

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T x\right).$$

(b) Benutze das Programm von Blatt 3, um 10 Realisierungen eines Poisson-Prozesses mit der Intensitätsfunktion

$$\lambda(x_1, x_2) = 10^{-5} x_1 x_2 \text{ für } x_1, x_2 \in [0, 100]$$

auf dem Fenster $W = [0, 100]^2$ zu generieren.

Bestimme für jede dieser 10 Realisierungen und für den Intensitätsschätzer aus (a) eine optimale Bandbreite $\hat{h}$ in der Menge $\{5, 6, \ldots, 15\}$ mittels Likelihood-Cross-Validation. Aus Effizienzgründen kann die Konstante c dabei durch h^2 ersetzt werden. Bestimme analog für jede Realisierung eine optimale Bandbreite in der Menge $\{21, 22, \ldots, 50\}$ für den Intensitätsschätzer von Blatt 3.

(c) Berechne für jede der 10 Realisierungen und beide Intensitätsschätzer mit den als optimal erkannten Bandbreiten wie auf Blatt 3 die Approximationen

$$\tilde{e}_h = \frac{1}{100^2} \sum_{i,j=0}^{99} [\hat{\lambda}_h((i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})) - \lambda((i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}))]^2$$

des mittleren quadratischen Fehlers .

$$\hat{e}_h = \frac{1}{\nu_2([0, 100]^2)} \int_{[0,100]^2} (\hat{\lambda}_h(x) - \lambda(x))^2 dx.$$

Vergleiche die Fehler der beiden Kernschätzer.