Prof. Dr. Volker Schmidt WS 2008/2009
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück 01.12.2008

Übungen zu Räumliche Statistik - Blatt 5

Präsentation der Lösungen: Montag, 08.12.08

Aufgabe 1

(a) Zeige, dass ein Poisson-Prozess $\{N_B\}$ auf $\mathbb{R}^d$ genau dann stationär ist, wenn sein Intensitätsmaß μ stationär ist.

(b) Wie verändert sich die obige Aussage, wenn $\{N_B\}$ ein allgemeines zufälliges Zählmaß mit Intensitätsmaß μ ist? Finde, falls eine der Implikationen nicht gilt, ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2

Seien $\{N_B^{(1)},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ und $\{N_B^{(2)},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ unabhängige homogene Poisson-Prozesse mit Intensitäten λ_1 bzw. λ_2. Sei $X_1, \ldots, X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine beliebige Familie von Zufallsvektoren, die von $\{N_B^{(1)}\}$ und $\{N_B^{(2)}\}$ unabhängig ist. Sei ferner $A(X_1, \ldots, X_n) = conv\{X_1, \ldots, X_n\}$ die zufällige konvexe Hülle von $X_1, \ldots, X_n$. Zeige, dass der Prozess

$$N_B = N^{(1)}_{B\cap A(X_1,\ldots,X_n)} + N^{(2)}_{B\cap A^c(X_1,\ldots,X_n)}$$

ein Cox-Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß $\{\Lambda_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist, wobei

$$\Lambda_B = \lambda_1 \nu_d(B \cap A(X_1, \ldots, X_n)) + \lambda_2 \nu_d(B \cap A^c(X_1, \ldots, X^n)).$$

Aufgabe 3

Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ ein stationärer Matern-Cluster-Prozess mit den Parametern $\lambda_0, \lambda^{(1)}, R > 0$ und sei $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \nu_2(W_n) = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_2(W_n \cap (W_n - x))}{\nu_2(W_n)} = 1$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^2$. Bestimme die asymptotische Varianz $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \nu_2(W_n) Var \widehat{\lambda}_{W_n}$ des Schätzers

$$\widehat{\lambda}_{W_n} = \frac{N_{W_n}}{\nu_2(W_n)}$$

für die Intensität λ von $\{N_B\}$ als Funktion von $\lambda_0, \lambda^{(1)}$ und R.