Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück

WS 2008/2009

Übungen zu Räumliche Statistik - Blatt 8

Präsentation der Lösungen: Montag, 26.01.09

Aufgabe 1

Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, Q)$ der kanonische Wahrscheinlichkeitsraum eines Poisson-Prozesses mit endlichem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty)$.

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Zeige mit Hilfe von Korollar 2.1, dass

$$\int_{\mathbb{N}} f(\varphi) Q(d\varphi) = f(0) e^{-\mu(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu(\mathbb{R}^d)}}{k!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} f(\sum_{j=1}^{k} \delta_{x_j}) \mu(dx_1) \ldots \mu(dx_k),$$

wobei $f(0)$ den Funktionswert des Nullmaßes bezeichnet.

(b) Zeige, dass der Strauss-Prozess auf dem Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$, wohldefiniert ist, d.h. für alle $a > 0$, $b \in [0, \infty]$ und $R > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{N}} a^{\varphi(W)} \exp\big[-b \sum_{x,y:\varphi(\{x\}),\varphi(\{y\})>0} 1\!\!1_{W\times W}(x,y) 1\!\!1_{(0,R)}(|x-y|)\big] Q(d\varphi) < \infty.$$

Aufgabe 2

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Zeige, dass der homogene Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensität λ_1 genau dann absolutstetig ist bezüglich des homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität λ_2, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$.
Hinweis: Benutze die starke Konsistenz des kanonischen Intensitätsschätzers und konstruiere darauf basierend eine Nullmenge des Poisson-Prozesses mit Intensität λ_2, die keine Nullmenge des Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist.

(b) Sei $\lambda_i : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ für $i = 1, 2$, so dass

$$\widetilde{\Lambda}_i(B) = \int_B \lambda_i(x) dx < \infty$$

für alle beschränkten Borelmengen $B \in \mathcal{B}_0$. Es gelte ferner, dass $\lambda_1(x) > 0$ stets $\lambda_2(x) > 0$ impliziert. Sei nun $W \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ ein beschränktes Beobachtungsfenster. Zeige mit Hilfe von Aufg. 1(a), dass

$$f(\varphi) = \exp(\Lambda_2(W) - \Lambda_1(W)) \prod_{x:\varphi(\{x\})>0} \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}$$

die Dichte des Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß $\Lambda_1(B) = \widetilde{\Lambda}_1(B \cap W)$ bezüglich des Poisson-Prozesses mit Intensitätsmaß $\Lambda_2(B) = \widetilde{\Lambda}_2(B \cap W)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist.

Aufgabe 3

Betrachte einen Hard-Core-Prozesses auf dem Fenster $W_n = [-n, n]^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit den Parametern $a = 1$ und $R > 0$.

(a) Zeige, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{R}_{W_n}(x)$ für den Parameter R durch

$$\hat{R}_{W_n}(x) = \min\{|x_i - x_j| : i \neq j,\, x_i, x_j \in W_n\} \mathbb{1}_{\{|x| \geq 2\}} + \mathrm{diam} W \, \mathbb{1}_{\{|x| < 2\}}$$

gegeben ist.

(b) Zeige, dass $\hat{R}_{W_n}$ sowohl schwach als auch stark konsistent ist.