

## Übungen zu Räumliche Statistik - Blatt 9

Präsentation der Lösungen: Donnerstag, 05.02.09

### Aufgabe 1

- (a) Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  die Dichte eines zufälligen Zählmaßes bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q$  auf dem Raum  $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$  der lokal endlichen Zählmaße. Sei  $c > 0$  eine Konstante, so dass  $f(\varphi) \leq c \forall \varphi \in \mathbb{N}$ . Seien ferner  $(U_1, N_1), (U_2, N_2), \dots$  iid mit unabhängigen Komponenten, wobei  $U_i \sim U([0, 1])$  und  $N_i \sim Q$  für  $i = 1, 2, \dots$ . Zeige, dass

$$(i) I = \min\{k \geq 1 : U_k < \frac{f(N_k)}{c}\} \sim Geo(c^{-1}),$$

$$\text{d.h. } P(I = j) = (1 - c^{-1})^{j-1}c^{-1}, \text{ und}$$

- (ii)  $N_I \sim \mathbf{P}$ , wobei  $\mathbf{P}$  die durch  $f$  gegebene Verteilung bezeichnet.

- (b) Zeige, dass folgender Algorithmus zur Simulation eines Strauss-Prozesses mit Aktivität  $a > 0$  und Interaktionsparameter  $b > 0$  auf einem Beobachtungsfenster  $W$  korrekt ist: Erzeuge so lange Realisierungen  $u_i$  von unabhängigen auf  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen und davon unabhängige Realisierungen  $n_i$  eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität  $a$  auf  $W$  bis erstmals

$$u_i < \exp(-bt_R(n_i)).$$

Dieses erste nicht verworfene Punktmuster  $n_i$  ist das Simulationsergebnis.

- (c) Implementiere den Algorithmus aus (b). Erzeuge für die Interaktionsparameter  $b = -\log(\gamma)$ ,  $\gamma = 0.2, 0.3, \dots, 1$ , jeweils eine Realisierung eines Strauss-Prozesses mit  $a = 0.1$  und  $R = 1$  auf dem Fenster  $W = [0, 25]^2$  und visualisiere in Abhängigkeit von  $\gamma$  die Anzahl von Realisierungen des Poisson-Prozesses, die benötigt wurde, bis erstmals eine Realisierung nicht verworfen wurde.

### Aufgabe 2

Erzeuge auf dem Beobachtungsfenster  $W = [0, 25]^2$  mit dem R-Paket Spatstat jeweils 100 Realisierungen eines Strauss-Prozesses für die Interaktionsparameter  $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ , wobei die Parameter  $R = 1.5$  und  $\beta = 1$  konstant gewählt werden. Die Parameterangaben beziehen sich auf die in Spatstat verwendete Definition des Strauss-Prozesses, d.h.  $\beta = a$  und  $\gamma = \exp(-b)$ , wobei  $a$  und  $b$  die Parameter der in der Vorlesung verwendeten Definition der Dichte sind. Berechne für jede der Realisierungen die Maximum-Pseudolikelihood-Schätzer  $\hat{\beta}_i^{(\gamma)}$  und  $\hat{\gamma}_i^{(\gamma)}$  für  $\beta$  bzw.  $\gamma$  und visualisiere die Wurzel des mittleren

quadratischen Fehlers

$$e_{\beta}(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\beta - \hat{\beta}_i^{(\gamma)})^2} \text{ und } e_{\gamma}(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\gamma - \hat{\gamma}_i^{(\gamma)})^2}$$

in Abhängigkeit von  $\gamma$ .

**Hinweis:**

Spatstat lässt sich mit dem Befehl `install.packages("spatstat")` installieren. Folgende Einträge in der Hilfe können nützlich sein: `rmh`, `rmh.default`, `rmhmodel`, `rmhmodel.default`, `ppm`. Sei `fit` das Objekt mit dem Ergebnis des Modelfittings (siehe `ppm`), dann erhält man die Schätzwerte für  $\gamma$  und  $\beta$  folgendermaßen:

```
result<-exp(coef(fit))
betaHat<-result[1]
gammaHat<-result[2]
```