

Übungen zu Räumliche Statistik - Blatt 9

Präsentation der Lösungen: Donnerstag, 05.02.09

Aufgabe 1

- (a) Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ die Dichte eines zufälligen Zählmaßes bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q auf dem Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ der lokal endlichen Zählmaße. Sei $c > 0$ eine Konstante, so dass $f(\varphi) \leq c \forall \varphi \in \mathbb{N}$. Seien ferner $(U_1, N_1), (U_2, N_2), \dots$ iid mit unabhängigen Komponenten, wobei $U_i \sim U([0, 1])$ und $N_i \sim Q$ für $i = 1, 2, \dots$. Zeige, dass

$$(i) I = \min\{k \geq 1 : U_k < \frac{f(N_k)}{c}\} \sim Geo(c^{-1}),$$

d.h. $P(I = j) = (1 - c^{-1})^{j-1}c^{-1}$, und

- (ii) $N_I \sim \mathbf{P}$, wobei \mathbf{P} die durch f gegebene Verteilung bezeichnet.

- (b) Zeige, dass folgender Algorithmus zur Simulation eines Strauss-Prozesses mit Aktivität $a > 0$ und Interaktionsparameter $b > 0$ auf einem Beobachtungsfenster W korrekt ist: Erzeuge so lange Realisierungen u_i von unabhängigen auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen und davon unabhängige Realisierungen n_i eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität a auf W bis erstmals

$$u_i < \exp(-bt_R(n_i)).$$

Dieses erste nicht verworfene Punktmuster n_i ist das Simulationsergebnis.

- (c) Implementiere den Algorithmus aus (b). Erzeuge für die Interaktionsparameter $b = -\log(\gamma)$, $\gamma = 0.2, 0.3, \dots, 1$, jeweils eine Realisierung eines Strauss-Prozesses mit $a = 0.1$ und $R = 1$ auf dem Fenster $W = [0, 25]^2$ und visualisiere in Abhängigkeit von γ die Anzahl von Realisierungen des Poisson-Prozesses, die benötigt wurde, bis erstmals eine Realisierung nicht verworfen wurde.

Aufgabe 2

Erzeuge auf dem Beobachtungsfenster $W = [0, 25]^2$ mit dem R-Paket Spatstat jeweils 100 Realisierungen eines Strauss-Prozesses für die Interaktionsparameter $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$, wobei die Parameter $R = 1.5$ und $\beta = 1$ konstant gewählt werden. Die Parameterangaben beziehen sich auf die in Spatstat verwendete Definition des Strauss-Prozesses, d.h. $\beta = a$ und $\gamma = \exp(-b)$, wobei a und b die Parameter der in der Vorlesung verwendeten Definition der Dichte sind. Berechne für jede der Realisierungen die Maximum-Pseudolikelihood-Schätzer $\hat{\beta}_i^{(\gamma)}$ und $\hat{\gamma}_i^{(\gamma)}$ für β bzw. γ und visualisiere die Wurzel des mittleren

quadratischen Fehlers

$$e_{\beta}(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\beta - \hat{\beta}_i^{(\gamma)})^2} \text{ und } e_{\gamma}(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\gamma - \hat{\gamma}_i^{(\gamma)})^2}$$

in Abhängigkeit von γ .

Hinweis:

Spatstat lässt sich mit dem Befehl `install.packages("spatstat")` installieren. Folgende Einträge in der Hilfe können nützlich sein: `rmh`, `rmh.default`, `rmhmodel`, `rmhmodel.default`, `ppm`. Sei `fit` das Objekt mit dem Ergebnis des Modelfittings (siehe `ppm`), dann erhält man die Schätzwerte für γ und β folgendermaßen:

```
result<-exp(coef(fit))
betaHat<-result[1]
gammaHat<-result[2]
```