Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
16.10.2008

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 1

(Abgabe: Donnerstag, 23.10.2008, vor den Übungen)

Übungsblätter können (und sollen) zu zweit abgegeben werden. Es ist eine Anmeldung zur Vorlesung bei SLC nötig.

Aufgabe 1 (1 + 4 + 2 + 1 Punkte)

Ein technisches System bestehe aus 3 Teilsystemen, die in einem betrachteten Zeitraum zufallsbedingt ausfallen können oder nicht.

(a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω für die möglichen Zustände des Systems an. Verwenden Sie dabei die Kodierung "1" für Ausfall und "0" für Nichtausfall.

(b) Betrachten Sie die zufälligen Ereignisse A : "Genau 2 Teilsysteme fallen aus", B : "Das Teilsystem 1 fällt aus" und bestimmen Sie $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A^c$ als Teilmengen von Ω und formulieren Sie diese zufälligen Ereignisse in Worten.

(c) Bestimmen Sie die Ereignisse C : "Kein Teilsystem fällt aus", D: "Höchstens 1 Teilsystem fällt aus", E: "Mindestens 1 Teilsystem fällt aus" sowie $A \cap E$ und $E \setminus B$.

(d) Welche der Ereignisse A, B, C, D und E sind paarweise unvereinbar?

Aufgabe 2 (3 + 3 + 3 Punkte)

Sei $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen eines Grundraumes Ω. Die von $\mathcal{E}$ *erzeugte* σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ ist definiert über $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}, \mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

(b) Gegeben sei der Grundraum Ω mit den Teilmengen $A \subset B \subset \Omega$ und sei $\mathcal{E} = \{A, B\}$. Geben Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ an.

(c) Sei $(\Omega, \sigma(\mathcal{E}), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ω und $\sigma(\mathcal{E})$ aus Aufgabe 2 (b). Es gelte $\mathbb{P}(A) = 0.4, \mathbb{P}(B) = 0.5$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse von $\sigma(\mathcal{E})$ an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie die folgende Bonferroni-Ungleichung: Für jedes $n \geq 1$ und jede Folge $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c).$$

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie:

(a) $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$,

(b) $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B)$.