Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
18.12.2008

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 10

(Abgabe: Donnerstag, 8.01.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 + 1 Punkte)
Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die gemeinsame Dichte

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + xy(x^2 - y^2)\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y.

(b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

(c) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien X und Y unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Berechnen Sie die Kovarianzen $Cov(X, Y)$ und $Cov(U, V)$, wobei $U = \min\{X, Y\}$ und $V = \max\{X, Y\}$.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 Punkte)
Seien X, Y, Z quadratisch integrierbare Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$, dass
$Cov(aX+bY, Z) = aCov(X, Z)+bCov(Y, Z)$ und $Cov(Z, aX+bY) = aCov(Z, X)+bCov(Z, Y)$.

(b) Zeigen Sie : Wenn X und Y identisch verteilt sind, dann sind $X - Y$ und $X + Y$ unkorreliert.

(c) Seien X und Y unabhängig und $Bin(1, p)$-verteilt, $0 < p < 1$. Sind dann $X - Y$ und $X + Y$ unabhängig?

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Laut Brockhaus sind 4% der männlichen Bundesbürger Linkshänder. Geben Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebychev eine Abschätzung nach unten für die Wahrscheinlichkeit an, dass unter 800 Studenten zwischen 24 und 40 Linkshänder sind. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem wahren Wert 0.8761 unter Binomialverteilung beziehungsweise dem Näherungswert unter Normalverteilung (zentraler Grenzwertsatz von DeMoivre-Laplace). Verwenden Sie für die Werte der Verteilungsfunktion der $N(0, 1)$-Verteilung die Quantil-Tabelle auf der Homepage.

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}\,|X| < \infty$. Zeigen Sie, dass für jedes $t \geq 0$

$$P(X \geq t) \leq \inf_{u \geq 0} \left\{e^{-tu}\,\mathbb{E}\,e^{uX}\right\}.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Es seien $a_1, \ldots, a_n$ positive Zahlen. Beweisen Sie mittels der Jensen-Ungleichung, dass

$$a_H \leq a_G \leq a_A$$

wobei $a_A = 1/n \cdot (a_1 + \cdots + a_n)$ das arithmetische Mittel, $a_G = (a_1 \cdot \cdots \cdot a_n)^{1/n}$ das geometrische Mittel und $a_H = (\frac{1}{n}(1/a_1 + \cdots + 1/a_n))^{-1}$ das harmonische Mittel bezeichnet.