Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
8.1.2009

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 11

(Abgabe: Donnerstag, 15.1.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (3 + 2 + 1 + 2 Punkte)
Wir betrachten eine zufällige Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$ sind. Um den Ertwartungswert bzw. die Varianz der Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ zu schätzen, können das arithmetischen Mittel $\overline{X}_n$ bzw. die sog. Stichprobenvarianz S_n^2 verwendet werden, die wie folgt gegeben sind:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 .$$

(a) Berechnen Sie die Varianz von $\overline{X}_n$.

(b) Zeigen Sie, dass S_n^2 ein ertwartungstreuer Schätzer für die Varianz σ^2 ist, d.h. $\mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2$. (Setzen Sie o.B.d.A. $\mu = 0$)

(c) Wie ist das Verhalten von $Var(\overline{X}_n)$, wenn der Stichprobenumfang n gegen unendlich geht und $\sigma^2 < \infty$ gilt?

(d) Schätzen Sie den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 bei Vorliegen der konkreten Stichprobe $(x_1, \ldots, x_{10}) = (2, 1.5, 3, 3.6, 1.1, 1.8, 2.2, 2.8, 2.1, 3.1)$.

Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)
Für eine zufällige Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ (siehe Aufgabe 1), kann die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ der Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Hilfe der *empirischen Verteilungsfunktion* $\widehat{F}_n : \mathbb{R} \times \Omega \to [0,1]$ (kurz $\widehat{F}_n(x)$) geschätzt werden, wobei

$$\widehat{F}_n(x,\omega) = \frac{\#\{i : 1 \le i \le n, X_i(\omega) \le x\}}{n} .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $n\widehat{F}_n(x)$ binomialverteilt ist mit Parametern n und $p = F(x)$, d.h.,
$$P(n\widehat{F}_n(x) = k) = \binom{n}{k}(F(x))^k(1-F(x))^{n-k}, \qquad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\} .$$

(b) Zeigen Sie, dass
$$\mathbb{E}(\widehat{F}_n(x)) = F(x) \quad \text{und} \quad Var(\widehat{F}_n(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n} .$$

Aufgabe 3 (3 + 2 Punkte)
Bei 100 Kindern einer Jahrgangsstufe werden die Zähne auf Karies untersucht. Bei jedem Kind wird die Anzahl der kariösen Zähne registriert, wobei die folgenden Daten (*konkrete Stichprobe*) vorliegen:

1	0	0	3	1	5	1	2	2	0	1	0	5	2	1	0	1	0	0	4	0	1	1	3	0
1	1	1	3	1	0	1	4	2	0	3	1	1	7	2	0	2	1	3	0	0	0	0	6	1
1	2	1	0	1	0	3	0	1	3	0	5	2	1	0	2	4	0	1	1	3	0	1	2	1
1	1	1	2	2	0	3	0	1	0	1	0	0	6	5	0	4	1	2	2	7	1	3	1	5

(a) Bestimmen Sie die empirische Verteilungsfunktion für die gegebenen Daten (X = Anzahl der kariösen Zähne, $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$).

(b) Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion aus Teil a).

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X multivariat normalverteilt mit Erwartungswertvektor $\mu \in \mathbb{R}^n$ und (symmetrischer und positiv definiter) Kovarianzmatrix $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{det(K)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top K^{-1}(x-\mu)\right), x \in \mathbb{R}^n$$

die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte hat. (Hinweis: K ist diagonalisierbar)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Seien X und Y Zufallsvariablen, deren Verteilungen die Dichten

$$f_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,, x \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \frac{5}{3}y^{-\frac{8}{3}}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(y)\,, y \in \mathbb{R}$$

besitzen. Verwenden Sie die Hölder–Ungleichung, um zu zeigen, dass $\mathbb{E}(XY) \leq 7.4$ gilt.