Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
15.01.2008

# Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

## Übungsblatt 12

(Abgabe: Donnerstag, 23.01.2009, vor den Übungen)

**Aufgabe 1** (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Sei $Y \sim U[0,1]$, zeigen Sie:

(a) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n = n\,\mathbb{1}_{[0,1/n]}(Y)$ gilt $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{L^1} 0$.

(b) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n = \mathbb{1}_{[0,1/2+1/n]}(Y)$ und $X = \mathbb{1}_{[1/2,1]}(Y)$ gilt $X_n \xrightarrow{d} X$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{P} X$.

(c) Für die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n \sim U[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n]$ und $X = 1/2$ gilt $X_n \xrightarrow{d} X$. Außerdem gilt **nicht** $F_{X_n}(1/2) \to F_X(1/2) = 1$ für $n \to \infty$. Ist dies ein Widerspruch zur Aussage $X_n \xrightarrow{d} X$?

(d) Sei $\{X_n\}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, wobei $X_n$ Beroulli-verteilt ist mit Parameter $\frac{1}{n}$. Zeigen Sie, dass $\{X_n\}$ im $L^2$, jedoch **nicht** fast sicher, gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 2** (2 + 2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Konvergenzaussagen für $n \to \infty$:

(a) Ist $X_n \sim \mathrm{Exp}(n)$, dann gilt $X_n \xrightarrow{P} 0$.

(b) Für die Folge $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ von unabhängigen, identisch $U(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen und $Y_n = n \cdot \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ gilt $Y_n \xrightarrow{d} Z$ mit $Z \sim Exp(1)$.

(c) Sei $\{Y_n\}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|Y_1| < \infty$, und sei $X_n = \frac{1}{n} Y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $\{X_n\}$ fast sicher gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 3** (2 + 2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für die Folge $\{X_n\}$ von unabhängigen, identisch $U(0,\theta)$-verteilten Zufallsvariablen mit $\theta > 0$ gilt $\max\{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow{P} \theta$.

(b) Sei $\{X_n\}$ eine monoton wachsende Folge von Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Folge fast sicher gegen eine Zufallsvariable $X$ konvergiert, falls $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge in (a) auch fast sicher und im $L^1$ gegen $\theta$ konvergiert.

**Aufgabe 4** (6 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ stetig und $X, X_n, Y, Y_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dann gilt:

1. $X_n Y_n \xrightarrow{f.s.} XY$, falls $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ und $Y_n \xrightarrow{f.s.} Y$,
2. $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$, falls $X_n \xrightarrow{P} X$ und $Y_n \xrightarrow{P} Y$,
3. $X_n Y_n \xrightarrow{L^1} XY$, falls $X_n \xrightarrow{L^2} X$ und $Y_n \xrightarrow{L^2} Y$.
4. $\varphi(X_n) \xrightarrow{f.s.} \varphi(X)$, falls $X_n \xrightarrow{f.s.} X$,
5. $\varphi(X_n) \xrightarrow{P} \varphi(X)$, falls $X_n \xrightarrow{P} X$,
6. $\varphi(X_n) \xrightarrow{d} \varphi(X)$, falls $X_n \xrightarrow{d} X$.