Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
22.1.2009

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 13

(Abgabe: Donnerstag, 29.1.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 + 4 Punkte)
Sei $\{X_n, n \geq 2\}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2nlog(n)}\,, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{nlog(n)}\,.$$

(a) Genügt die Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen?

(b) Genügt die Folge dem starken Gesetz der großen Zahlen?

Aufgabe 2 (1 + 4 Punkte)
Wir betrachten eine zufällige Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$ sind. Um den Erwartungswert bzw. die Varianz der Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ zu schätzen, können das Stichprobenmittel $\overline{X}_n$ bzw. die sog. Stichprobenvarianz S_n^2 verwendet werden, die wie folgt gegeben sind:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{f.s.}} \mu$ für $n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass $S_n^2 \xrightarrow{\text{f.s.}} \sigma^2$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Außerdem sei $\mu = \mathbb{E}X_1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ und $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Zeigen Sie, dass

(a) $N(t) \xrightarrow{\text{f.s.}} \infty$ für $t \longrightarrow \infty$ und $P(N(t) < \infty) = 1$ für jedes $t > 0$.

(b) $S_{N(t)}/N(t) \xrightarrow{\text{f.s.}} \mu$.

(c) $t/N(t) \xrightarrow{\text{f.s.}} \mu$ und $N(t)/t \xrightarrow{\text{f.s.}} 1/\mu$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $\{X_n, n \geq 1\}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen. Weisen Sie nach, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}\log(n)}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{P}} 0,$$

falls $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ gilt.