Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
29.01.2008

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 14

(Abgabe: Donnerstag, 05.02.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 4 Punkte)

Es sei $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ eine stetige Funktion mit Integral

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

Sei $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die $U[0,1]$-verteilt sind und sei

$$Z_n = \mathbb{1}_{\{Y_n \le f(X_n)\}}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i \xrightarrow{f.s.} I$ für $n \longrightarrow \infty$.

(b) Wie groß muß n mindestens sein, so dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$ mit Wahrscheinlichkeit 0.95 maximal um 0.01 von I abweicht?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Folge $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ von Zufallsvariablen mit $X_n \sim \text{Poi}(n\lambda)$. Zeigen Sie unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes, dass gilt:

$$\frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{d} X \qquad \text{mit} \quad X \sim N(0,1)\,.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine Zufallsvariable X die charakteristische Funktion ist genau dann reellwertig, wenn $X \overset{d}{=} -X$ gilt.

Aufgabe 4 (3 + 3 + 3 Punkte)

(a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion der $Bin(1,p)$-Verteilung und der Gleichverteilung auf $[0,1]$.

(b) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion von $X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$ gegeben ist durch $\varphi_X(t) = \lambda/(\lambda - it)$. Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der Erlang-Verteilung (siehe Blatt 8).

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von charakteristischen Funktionen, dass $X = \sum_{j=1}^n c_j X_j$ normalverteilt ist mit $\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^n c_j \mu_i$ und $VarX = \sum_{j=1}^n c_j^2 \sigma_j^2$, falls $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind und $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ für $j = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Eine Zufallsvariable $Y \sim \Gamma(b,p)$ heißt gammaverteilt mit Parametern $b > 0, p > 0$, wenn Y absolutstetig ist mit Dichte f_Y, die gegeben ist durch

$$f_Y(y) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} e^{-by} y^{p-1} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\,.$$

Die charakteristische Funktion von Y ist gegeben durch $\varphi_Y(t) = 1/(1 - \frac{it}{b})^p$. Zeigen Sie, dass $U_r = X_1^2 + \cdots + X_r^2 \sim \Gamma(1/2, r/2)$, falls $X_1, \ldots, X_r \sim N(0,1)$ und unabhängig sind. Dann heißt U_r auch χ^2-verteilt mit r Freiheitsgraden.