Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
5.2.2009

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 15

(keine Abgabe; Besprechung am 12.2.2009 in den Übungen)

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe mit $X_1 \sim Exp(\lambda)$, d.h. insbesondere, dass $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt sind. Bestimmen Sie die Verteilung von $\overline{X}_n$ sowie den Erwartungswert und die Varianz von $\overline{X}_n$ und S_n^2.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Seien $Y_1, Y_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $Y_1 \sim \Gamma(b, p_1)$ und $Y_2 \sim \Gamma(b, p_2)$, wobei $b, p_1, p_2 > 0$. Zeigen Sie, dass

$$Y_1 + Y_2 \sim \Gamma(b, p_1 + p_2).$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Wir betrachten eine Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ von iid Stichprobenvariablen mit $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}\,,$$

wobei

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2\,.$$

Hinweis: Benutzen sie, dass $\overline{X}_n$ und S_n^2 unabhängig sind.

Aufgabe 4 (4 + 3 + 4 Punkte)
Sei $U_r : \Omega \to \mathbb{R}$ eine χ_r^2–verteilte Zufallsvariable.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{r\to\infty} P\left(\frac{U_r - r}{\sqrt{2r}} \le z\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$ für jedes $z \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Verwenden Sie (a), um zu zeigen, dass für jedes $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{r\to\infty} P\left(\sqrt{2U_r} - \sqrt{2r-1} \le z\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy\,.$$

(c) Für $r = 25$ erhält man $P(U_{25} \le 34.382) = 0.90$. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeit 0.9 mit den Näherungswerten, die sich aus Teil (a) bzw. (b) für $P(U_{25} \le 34.382) = 0.90$ ergeben. Zeigen Sie hierzu zunächst mit Hilfe von (b), dass

$$P(U_r \le z) \approx \Phi(\sqrt{2z} - \sqrt{2r-1}) \qquad \text{für} \quad z > 0\,,$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Hinweis: $\Phi(1.3268) = 0.9077$, $\Phi(1.2924) = 0.9019$.