Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
6.11.2008

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 4

(Abgabe: Donnerstag, 13.11.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (3 + 1 + 4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ unabhängige Ereignisse, wobei $n \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl ist. Zeigen Sie, dass

(a) $A_1^c, \ldots, A_n^c$ unabhängige Ereignisse sind.

(b) $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$ gilt.

(c) $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = 1 \Longleftrightarrow P(\limsup_i A_i) = 1$ gilt, falls $P(A_i) < 1$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

(a) Das Ereignis A sei unabhängig von den Ereignissen B_1 und B_2. Weiter gelte $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass A und $B_1 \cup B_2$ unabhängig sind.

(b) Die Ereignisse A und B seien unabhängig und es gelte $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt mindestens eines dieser Ereignisse ein? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt genau eines dieser Ereignisse ein?

Aufgabe 3 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Es werden nacheinander zwei Münzen geworfen. Die Ereignisse A, B, C und D seien gegeben durch

- A : die zuerst geworfene Münze zeigt Kopf
- B : es erscheint mindestens einmal Kopf
- C : es erscheint mindestens einmal Zahl
- D : die zweite Münze zeigt Kopf

Überprüfen Sie, ob folgende Ereignisse unabhängig sind (mit Begründung):
(a) A und C; (b) A und D; (c) B und C; (d) B und D

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Es sei $0 < P(A) < 1$. Dann gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Longleftrightarrow P(B \mid A) = P(B \mid A^c)$$

(b) Es gibt Ereignisse A und B mit

$$0 < P(B) < 1, P(A \mid B) = P(A) \text{ und } P(A \cup B) = P(A \cap B)$$

Aufgabe 5 (2 + 1 + 1 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit $p_i = P(X = i) = c \cdot q^i$ für $i = 1, 2, \ldots$, $c \geq 0$ und $0 < q < 1$.

(a) Bestimmen Sie c, so dass $\{p_i\}$ eine Zähldichte (= Wahrscheinlichkeitsfunktion) bildet.

(b) Bestimmen Sie $P(X \text{ ist gerade})$.

(c) Bestimmen Sie die Zähldichte der Zufallsvariablen $Y = \min\{X, 8\}$.