Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
13.11.2008

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 5

(Abgabe: Donnerstag, 20.11.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißen stochastisch äquivalent, falls

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$$

Zeigen Sie : Zwei stochastisch äquivalente Zufallsvariablen besitzen die gleiche Verteilung und die Umkehrung ist i. a. falsch.

Aufgabe 2 (4 + 4 Punkte)

(a) Ein Würfel wird viermal geworfen. Die Zufallsvariable X_1 gebe an, wie oft die Augenzahl echt kleiner als 3 ist. Geben Sie eine geeignete Darstellung von $X_1 : \Omega \to C$ mit einem entsprechenden Grundraum Ω und Wertebereich C an. Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X_1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 > 2)$.

(b) Sei $p \in [0, 1]$. Die Zufallsvariable X_2 habe die Verteilungsfunktion

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - p, & -1 \leq x < 0, \\ 1 - p + \frac{1}{2}xp, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_{X_2} und berechnen Sie $P(-1 < X_2 \leq 1)$, $P(X_2 = 0)$ und $P(X_2 = -1)$.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c\, e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x}) & ,\text{falls } x > 0\,, \\ 0 & ,\text{falls } x \leq 0\,, \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$.

(a) Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist f eine Dichte?

(b) Bestimmen Sie die zu f gehörige Verteilungsfunktion.

(c) Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit Dichte f. Berechnen Sie $P(1 \leq X \leq 4)$ und skizzieren Sie f für $\lambda = 1$. Fügen Sie in der Skizze eine anschauliche Interpretation von $P(1 \leq X \leq 4)$ und die Verteilungsfunktion hinzu.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ein Meinungsforschungsinstitut will den voraussichtlichen Stimmenanteil p der Partei A ermitteln, wenn am Sonntag Bundestagswahl wäre. Dazu werden n Wahlberechtigte befragt und jeweils vermerkt, ob sie für die Partei A stimmen werden oder nicht. Wieviele Wahlberechtigte müssen mindestens befragt werden, um den Stimmenanteil der Partei mit einer Sicherheit von mindestens 95% auf eine absolute Genauigkeit von ±2% vorhersagen zu können? (Hinweis : Zeigen Sie zuerst, dass $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ für $X \sim N(0, 1)$. Benutzen Sie dann den zentralen Grenzwertsatz von De Moivre-Laplace und $F_X(1.96) \approx 0.975$.)