Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
20.11.2008

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 6

(Abgabe: Donnerstag, 27.11.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Es sei $X = (X_1, ..., X_n)$ ein beliebiger Zufallsvektor.

(a) Zeigen Sie, dass jeder Teilvektor $(X_{i_1}, ..., X_{i_m})$ mit $\{i_1, ..., i_m\} \subseteq \{1, ..., n\}$ und $2 \le m \le n$ aus unabhängigen Komponenten besteht, falls dies für den Gesamtverktor X gilt.

(b) Widerlegen Sie, dass aus der paarweisen Unabhängigkeit der Komponenten von X die vollständige Unabhängigkeit aller Komponenten von X folgt (Wählen Sie z.B. $n = 3$).

(c) Betrachten Sie den Zufallsvektor (X, Y) mit Wahrscheinlichkeitsfunktion

(X,Y)	-1	0	1
-1	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$
0	$\frac{5}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{3}{32}$
1	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

Zeigen Sie, dass X^2 und Y^2 unabhängig sind, X und Y jedoch nicht.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zeigen Sie mittels Induktion, dass die Summe von n unabhängigen poissonverteilten Zufallsvariablen wieder poissonverteilt ist, wobei die einzelnen Parameter nicht notwendigerweise identisch sein müssen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Eine Münze wird N mal geworfen, wobei $N \sim \text{Poi}(\lambda)$. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf sei p und für Zahl $q = 1 - p$. Seien X bzw. Y die Anzahlen von Versuchen mit Kopf bzw. Zahl. Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 4 (4 + 2 + 1 Punkte)
Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2}{4e^{-1}-1} x_1 e^{-x_2} & \text{, falls } 0 \le x_1 \le 1\,, 0 < x_2 \le x_1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

bzw. $Y = (Y_1, Y_2)$ mit gemeinsamer Dichte

$$f_2(y_1, y_2) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } 0 \le y_1 \le 1\,, 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

(a) Sind X_1 und X_2 bzw. Y_1 und Y_2 unabhängig?

(b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F_2(y_1, y_2)$ von Y_1 und Y_2.

(c) Bestimmen Sie die bedingte Dichte von X_2 unter der Bedingung $\{X_1 = x_1\}$ für $0 < x_1 \le 1$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Seien X und Y unabhängig und identisch verteilt mit stetiger Dichte f und Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen F_U bzw. F_V und die Dichten f_U bzw. f_V von $U = \max\{X, Y\}$ bzw. $V = \min\{X, Y\}$.