

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 7

(Abgabe: Donnerstag, 4.12.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Angenommen, Sie stehen in einer Warteschlange vor einem Schalter. Die Bedienzeiten in Minuten am Schalter seien unabhängig und $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt für ein $\lambda > 0$.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde vor Ihnen mindestens doppelt so viel Zeit am Schalter verbringt wie Sie?
- Wenn der Kunde vor Ihnen 5 Minuten am Schalter benötigte, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 5 Minuten am Schalter stehen?

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2}), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die Dichte von $X \cdot Y$.
- Bestimmen Sie die Dichte von X/Y .
- Sei U eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Dichten von $Y = -(1/\lambda) \log U$ für $\lambda > 0$ und von U^2 .
- Sei $X \sim N(0, 1)$. Bestimmen Sie die Dichte von $Y = e^X$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die absolutstetigen Zufallsvariablen X und $-X$ genau dann dieselbe Verteilung besitzen, wenn $f_X(x) = f_X(-x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 1 Punkte)

Das Gewicht leerer Flaschen sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 100$ und $\sigma^2 = 25$. Die Abfüllung wird folgendermaßen durchgeführt: die Flaschen werden auf eine Waage gestellt. Die Zufuhr wird dann abgestellt, wenn das Gesamtgewicht 610 erreicht wird. Die Flaschen seien so groß, dass das Überlaufen praktisch ausgeschlossen werden kann.

- Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable des Füllgewichts, falls das Gesamtgewicht exakt 610 ist?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt der Inhalt mindestens 500? (Hinweis: $\Phi(1) = 0.841345$, $\Phi(2) = 0.977250$, $\Phi(3) = 0.998650$)
- Bei Erreichen des Gesamtgewichts 610 kann im Allgemeinen der Zulauf nicht exakt gestoppt werden. Der Fehler des Gesamtgewichts der Flasche sei $N(0, 2)$ -verteilt und unabhängig vom Flaschengewicht. Welche Verteilung hat in diesem Fall das Füllgewicht?