Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
27.11.2008

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 7

(Abgabe: Donnerstag, 4.12.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Angenommen, Sie stehen in einer Warteschlange vor einem Schalter. Die Bedienzeiten in Minuten am Schalter seien unabhängig und $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt für ein $\lambda > 0$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde vor Ihnen mindestens doppelt so viel Zeit am Schalter verbringt wie Sie?

(b) Wenn der Kunde vor Ihnen 5 Minuten am Schalter benötigte, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mehr als 5 Minuten am Schalter stehen?

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Dichte von $X \cdot Y$.

(b) Bestimmen Sie die Dichte von X/Y.

(c) Sei U eine auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Dichten von $Y = -(1/\lambda)\log U$ für $\lambda > 0$ und von U^2.

(d) Sei $X \sim N(0,1)$. Bestimmen Sie die Dichte von $Y = e^X$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die absolutstetigen Zufallsvariablen X und $-X$ genau dann dieselbe Verteilung besitzen, wenn $f_X(x) = f_X(-x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 1 Punkte)

Das Gewicht leerer Flaschen sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 100$ und $\sigma^2 = 25$. Die Abfüllung wird folgendermaßen durchgeführt: die Flaschen werden auf eine Waage gestellt. Die Zufuhr wird dann abgestellt, wenn das Gesamtgewicht 610 erreicht wird. Die Flaschen seien so groß, dass das Überlaufen praktisch ausgeschlossen werden kann.

(a) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable des Füllgewichts, falls das Gesamtgewicht exakt 610 ist?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt der Inhalt mindestens 500? (Hinweis: $\Phi(1) = 0.841345$, $\Phi(2) = 0.977250$, $\Phi(3) = 0.998650$)

(c) Bei Erreichen des Gesamtgewichts 610 kann im Allgemeinen der Zulauf nicht exakt gestoppt werden. Der Fehler des Gesamtgewichts der Flasche sei $\mathrm{N}(0,2)$-verteilt und unabhängig vom Flaschengewicht. Welche Verteilung hat in diesem Fall das Füllgewicht?