Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
4.12.2008

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 8

(Abgabe: Donnerstag, 11.12.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei X eine Zufallsvariable. Berechnen Sie den Erwartungswert von X, falls

(a) $X \sim Poi(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(b) $X \sim Exp(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(c) $X \sim U(a, b)$ mit Parametern $a < b$.

(d) $X \sim Bin(n, p)$ mit Parametern $p \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$.

(e) $P(X = k) = -\dfrac{(1-p)^k}{k \ln p}, \quad k \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$.

(f) $P(X > t) = \exp\{-\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\}, \quad t > 0, T > 0$.

(g) $F_X(x) = \left(1 - 0.8e^{1-x}\right) 1\!\!\mathrm{I}_{\{x \geq 1\}}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (3 + 1 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(a) Zeigen Sie, dass $X = X_1 + \cdots + X_n$ Erlang-verteilt ist mit den Parametern n und λ.

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

Hinweis. Eine absolutstetige Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & \text{, falls } x > 0\,, \\ 0 & \text{, falls } x \leq 0\,, \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, heißt Erlang-verteilt mit den Parametern n und λ.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bei einem Glücksspiel kann ein Spieler Geld setzen. Es wird eine faire Münze geworfen und bei Kopf bekommt der Spieler den doppelten Einsatz zurück. Das Glücksspiel wird unabhängig wiederholt. Der Spieler fängt mit 1 Euro Einsatz an. Wenn er ein Spiel gewinnt, dann hört er auf und nimmt den Gewinn mit. Wenn er verliert, dann verdoppelt er seinen Einsatz und spielt weiter. Dies wiederholt er bis zu einem Gewinn. Sei X der Gewinn nach Abzug aller Einsätze und Y die Summe aller Einsätze, wenn er aufhört zu spielen. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ und Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}X^r = \int_0^\infty r x^{r-1}(1 - F(x))dx$$

gilt, falls $r > 0$.