Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Ralf Thiedmann
Dipl.-Math. oec. Florian Voss

WS 2008/09
11.12.2008

# Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

## Übungsblatt 9

(Abgabe: Donnerstag, 18.12.2008, vor den Übungen)

**Aufgabe 1** (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei $X$ eine Zufallsvariable. Berechnen Sie das 2. Moment und die Varianz von $X$, falls

(a) $X \sim Poi(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(b) $X \sim Exp(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(c) $X \sim Bin(n,p)$ mit Parametern $p \in [0,1], n \in \mathbb{N}$.

(d) $P(X=k) = -\dfrac{(1-p)^k}{k \ln p}, \quad k \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$.

(e) $P(X > t) = \exp\{-\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\}, \quad t > 0, T > 0$.

(f) $F_X(x) = \left(1 - 0.8e^{1-x}\right) 1\!\!1_{\{x \geq 1\}}, \quad x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2** (3 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}\,(X^2) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left((X-a)^2\right) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}\,X)^2\right).$$

**Aufgabe 3** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}X$ einer Zufallsvariablen $X$, die mit Wahrscheinlichkeit 1 nur Werte in einem Interval $[a,b]$, $a < b$, annimmt, auch im Intervall $[a,b]$ liegt.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Sei $X$ exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X_1 = e^{-X}$, $X_2 = 2X$ und $X_3 = \max\{X, 1/3\}$.

**Aufgabe 5** (2 + 2 Punkte)

Ein Anleger verfügt am Beginn einer Periode über 100 000 Euro. Er investiert 60 000 Euro in eine Anlagemöglichkeit, die eine zufallsabhängige Rendite $X$ mit $\mathbb{E}X = 0.08$ und $\mathrm{Var}X = 0.0004$ besitzt. Die restlichen 40 000 Euro legt er zur zufallsabhängigen Rendite $Y$ mit $\mathbb{E}Y = 0.06$ und $\mathrm{Var}Y = 0.0001$ an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Vermögens $Z$ am Ende der Periode, wenn $X$ und $Y$

(a) unabhängige Zufallsvariablen sind,

(b) den Korrelationskoeffizienten $-0.3$ besitzen.