Prof. Dr. E. Spodarev
D. Meschenmoser

Wintersemester 2009 / 2010
22. Oktober 2009

Statistik II – Übungsblatt 2

Abgabe: 29. Oktober 2009, vor den Übungen

Bitte meldet Euch im SLC unter
`https://slcbeta.mathematik.uni-ulm.de:8443/login.html`
zur Vorlesung an!

Bitte Euren Namen, Studiengang und angestrebten Abschluss **deutlich** lesbar auf das Lösungsblatt schreiben!

Aufgabe 1 (5)

Sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobe von iid Zufallsvariablen $X_1 \sim \text{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Betrachte den Test $\varphi(X_1, \dots, X_n) = \mathbb{1}\left(n\overline{X}_n \geq \pi_{n\lambda,1-\alpha}\right)$ wobei $\pi_{\lambda,\alpha}$ das α-Quantil der $\text{Poi}(\lambda)$-Verteilung bezeichne. Sei F_λ die Verteilungsfunktion einer $\text{Poi}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen. Zeige dass für $x \in (0,1)$ folgendes gilt:

$$\mathbb{P}(p \leq x) = 1 - F_{n\lambda}(\pi_{n\lambda,1-x}).$$

Aufgabe 2 (4)

Eine Teststatistik $T(X_1, \dots, X_n)$ sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Die Testhypothese sei $\lambda \leq 1$, während die Alternativhypothese $\lambda > 1$ sei. Definiere analog zum p-Wert folgende Größe:

$$\widetilde{p}(t) = \mathbb{P}(T(X_1, \dots, X_n) \leq t \mid \lambda = 1)$$

Welche Dichte hat der $\widetilde{p}$-Wert, d.h. die Zufallsvariable $\widetilde{p}(T(X_1, \dots, X_n))$, wenn die Teststatistik $T(X_1, \dots, X_n)$ exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda_1 > 1$?

Aufgabe 3

Sei (X_1, X_2) eine Zufallsstichprobe von iid Zufallsvariablen $X_1 \sim U(\theta, \theta + 1)$ mit $\theta \in \mathbb{R}$. Um die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \theta > 0$ zu testen, betrachten wir zwei Tests:

$$\varphi_1(X_1, X_2) = \mathbb{1}(X_1 > 0.95) \quad \text{und} \quad \varphi_2(X_1, X_2) = \mathbb{1}(X_1 + X_2 > c) \text{ mit } c > 0$$

a) Bestimme die Dichte von $X_1 + X_2$ in Abhängigkeit von θ. (3)

b) Bestimme die Gütefunktion $G_1(\theta)$ von φ_1. (2)

c) Bestimme die Gütefunktion $G_2(\theta)$ von φ_2. (4)

d) Finde ein c, für das die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler erster Art bei φ_1 und φ_2 übereinstimmen. (3)

e) Zeige, dass φ_2 nicht besser als φ_1 ist, d.h. zeige dass ein $\theta \in \mathbb{R}$ existiert mit $G_1(\theta) > G_2(\theta)$). (3)

Aufgabe 4

In der Ulmer Donauklinik wurde bei 21 neugeborenen Jungen das Durchschnittsgewicht $\overline{x}_{21} = 3300g$ (Gramm) und die Standardabweichung $s_x = 470g$ festgestellt. Entsprechend erhielt man bei der Stichprobe von 16 Mädchen das Durchschnittsgewicht $\overline{y}_{16} = 3050g$ und die Standardabweichung $s_y = 460g$. Nimm an, dass die Stichproben von Jungen und Mädchen unabhängig sind und dass das Gewicht der Jungen $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ und das der Mädchen $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$-verteilt ist.

a) Teste $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ vs. $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ zum Niveau $\alpha = 0.1$. (2)

b) Unter der Annahme $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, teste $H_0 : \mu_x = \mu_y$ vs. $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$ zum Niveau $\alpha = 0.05$. (3)