Prof. Dr. E. Spodarev
D. Meschenmoser

Wintersemester 2009 / 2010
29. Oktober 2009

Statistik II – Übungsblatt 3

Abgabe: 05. November 2009, vor den Übungen

Aufgabe 1 (4)

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe mit iid Zufallsvariablen $X_i \sim \text{Poi}(\lambda)$. Schreibe ein R-Programm, um einen asymptotischen Test der Nullhypothese $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ durchzuführen. Erzeuge dazu $n = 10, 20, 30, 40, 50$ $\text{Poi}(2)$-verteilte Pseudozufallszahlen und teste jeweils obige Nullhypothese mit $\lambda_0 = 1$ zum Niveau $\alpha = 0.05$. Drucke den Programmcode und die Testergebnisse (NICHT die Pseudozufallszahlen) aus. Ab welchem Stichprobenumfang scheint der Test brauchbare Ergebnisse zu liefern? Führe den Test mehrmals mit verschiedenen Realisierungen der Zufallsstichprobe durch, um diese Frage zu beantworten.

Hinweis: Ein Skript zur Einführung in R gibt es auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 2

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe mit iid Zufallsvariablen $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$ und ein $\sigma > 0$. Zur Überprüfung der Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$ zum Niveau α wird der Test

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{1}\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma} > z_{1-\alpha}\right)$$

verwendet.

a) Zeige, dass $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ ein NP-Test zum Niveau α für das Testproblem $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$ ist. (4)

b) Ist der Test aus a) auch ein bester Test? Begründe Deine Aussage. (1)

Aufgabe 3

Welche der folgenden Verteilungen mit Dichte $f_\theta(x)$ haben einen monotonen Dichtekoeffizienten? Gib gegebenenfalls auch eine Statistik an, in der der Koeffizient monoton ist.

a) $f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta}\mathbb{1}(-\theta < x < \theta)$ für $\theta > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ (Gleichverteilung). (2)

b) $f_\theta(x) = \frac{x^{\theta/2-1}\exp(-x/2)}{2^{\theta/2}\Gamma(\theta/2)} \mathbb{1}(x > 0)$ mit $\theta \in \mathbb{N}$ (Chi-Quadrat-Verteilung). (2)

Aufgabe 4

Welche der folgenden parametrischen Familien von Verteilungen $\{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ mit (Zähl-) Dichte $f_\theta(\cdot)$ bilden eine einparametrische Exponentialklasse?

a) $f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} \mathbb{1}(-\theta < x < \theta)$ mit $\theta > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ (Gleichverteilung). (2)

b) $f_\theta(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \mathbb{1}(x \in \{0, \ldots, n\})$ wobei $n \in \mathbb{N}$ bekannt sei und $0 < \theta < 1$ (Binomialverteilung). (2)

c) $f_\theta(x) = \frac{\theta^x}{x!} \exp(-\theta) \mathbb{1}(x \in \mathbb{N}_0)$ mit $\theta > 0$ (Poisson-Verteilung). (2)

d) $f_\theta(x) = \frac{x^{\theta-1}}{2^\theta \Gamma(\theta)} \exp(-x/2) \mathbb{1}(x \geq 0)$ mit $\theta > 0$ (Gamma $(\theta, 1/2)$-Verteilung). (2)

Aufgabe 5

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe mit iid Zufallsvariablen $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt sei. Betrachte die Testgröße $T(X_1, \ldots, X_n) = \sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma}$. Getestet werden soll die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$ zum Niveau α.

a) Ist der Test konsistent? (2)

b) Ist der Test unverfälscht? (2)