Prof. Dr. E. Spodarev
D. Meschenmoser

Wintersemester 2009 / 2010
10. Dezember 2009

Statistik II – Übungsblatt 9

Abgabe: 17. Dezember 2009, vor den Übungen

Aufgabe 1
Sei X ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei A eine $m \times n$ - Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Zeige, dass $\mathbb{E}(AX) = A\mathbb{E}X$. (1)

b) Zeige, dass $\operatorname{Cov}(AX + b) = A \operatorname{Cov}(X) A^\top$. (3)

Aufgabe 2
Gegeben sei das lineare Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ mit $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ und $\operatorname{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 V$, wobei V eine symmetrische, positiv definite $n \times n$ - Matrix ist und X eine $n \times m$ - Matrix mit $\operatorname{rg}(X) = m$.

a) Zeige, dass $\widehat{\beta} = \left(X^\top V^{-1} X\right)^{-1} X^\top V^{-1} Y$ der Kleinste-Quadrate-Schätzer für β bezüglich der Norm $\|x\|_V = \sqrt{x^\top V^{-1} x}$ ist, d.h. zeige dass gilt: (5)

$$\left\| Y - X\widehat{\beta} \right\|_V^2 = \min_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|Y - X\beta\|_V^2 .$$

b) Zeige, dass $\widehat{\beta}$ erwartungstreu für β ist. (2)

c) Zeige, dass gilt: $\operatorname{Cov}\left(\widehat{\beta}\right) = \sigma^2 \left(X^\top V^{-1} X\right)^{-1}$. (2)

Hinweis: Du kannst folgende Aussage benutzen (ohne Beweis): Sei A eine symmetrische, positiv definite $m \times m$ - Matrix und sei B eine $r \times m$ - Matrix mit $\operatorname{rg}(B) = r \leq m$. Dann sind auch die Matrizen $BAB^\top$ und A^{-1} positiv definit.

Aufgabe 3 (2)
Sei ein lineares Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ gegeben, wobei X eine $n \times m$ - Matrix mit $\operatorname{rg}(X) = r < m$ ist. Sei $a \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass die Funktion $a^\top \beta$ genau dann erwartungstreu schätzbar ist, wenn gilt: $a^\top X^- X = a^\top$.

Aufgabe 4

Betrachte folgendes lineares Modell:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass $\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{2}{3}\beta_3$ erwartungstreu schätzbar ist. (2)

b) Bestimme den besten linearen erwartungstreuen Schätzer für $\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{2}{3}\beta_3$. (3)