Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück

WS 2009/10
16.10.2009

Übungen zu Stochastik II - Blatt 1

(Abgabe: Donnerstag, 22.10.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1
Sei $\{N_t\}$ ein Erneuerungsprozess mit exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten $T_i \sim Exp(\lambda)$.

(a) Zeige: N_t ist Poisson-verteilt für jedes $t > 0$. (3)

(b) Bestimme den Parameter dieser Poisson-Verteilung. (1)

(c) Bestimme die Erneuerungsfunktion $H(t)$. (1)

Aufgabe 2
Zeige: Für die Erneuerungsfunktion $H(t) = \mathbb{E}N_t$ eines Erneuerungsprozesses $\{N_t\}$ gilt die folgende Abschätzung

$$F(t) \leq H(t) \leq F(t)/(1 - F(t)) \text{ für jedes } t \in \mathbf{D} = \{t \geq 0 : F(t) < 1\} ,$$

wobei $F(t)$ die Verteilungsfunktion der Zwischenankunftszeiten ist. (4)

Aufgabe 3
Sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess. Zeige:

(a) Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig und additiv (d. h. $f(v + w) = f(v) + f(w)\ \forall v, w \in \mathbb{R}$) ist, gilt: $\exists\, \beta \in \mathbb{R}$, so dass$f(t) = \beta t$. (2)

(b) Wenn $\{X_t, t \geq 0\}$ stationäre Zuwächse hat und die Funktion $f(t) = \mathbb{E}X_t$ stetig in t ist, dann ist $f(t)$ linear in t, d.h. $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass$f(t) = \alpha + \beta t$. (2)

(c) Wenn $\{X_t, t \geq 0\}$ stationäre und unabhängige Zuwächse hat und die Funktion $g(t) = \mathrm{Var}(X_t - X_0)$ stetig in $t \geq 0$ (und nicht identisch Null) ist, dann gilt:

$$\exists\, \sigma^2 > 0, \text{ so dass } \mathrm{Var}(X_{s+t} - X_s) = \sigma^2 t \text{ für beliebige } s, t \geq 0$$

. (2)

Bitte wenden!

Aufgabe 4
Finde ein Beispiel für stochastische Prozesse $\{X_t, t \in [0,1]\}$ und $\{Y_t, t \in [0,1]\}$, die Modifikationen von einander sind, aber nicht ununterscheidbar. (3)

Hinweise:

- Man sagt, dass der Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ **stationäre Zuwächse** hat, wenn die Verteilungen der Zufallsvektoren $(X_{t_1+h} - X_{t_0+h}, \ldots, X_{t_n+h} - X_{t_{n-1}+h})$ für beliebige Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ und $h > 0$ nicht von h abhängen.
- Man sagt, dass der Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ **unabhängige Zuwächse** hat, wenn die Zufallsvariablen $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ unabhängig sind.
- Die Prozesse $\{X_t, t \geq 0\}$ und $\{Y_t, t \geq 0\}$ über einunddemselben Wahrscheinlichkeitsraum heißen **Modifikationen** von einander, wenn $P(X_t = Y_t) = 1$ für jedes $t \geq 0$.
- Die Prozesse $\{X_t, t \geq 0\}$ und $\{Y_t, t \geq 0\}$ über einunddemselben Wahrscheinlichkeitsraum heißen **ununterscheidbar**, wenn $P(X_t = Y_t \text{ für jedes } t \geq 0) = 1$.

Organisatorisches:

- Aktuelle Informationen zur Vorlesungen sind unter

  http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stochastik/lehre/ws0910/stochastik-ii.html

  zu finden. Dort stehen u. a. auch die Übungsblätter zum Download bereit.
- Die Lösungen der Übungsblätter bitte einzeln abgeben. Bitte die Namen **deutlich** schreiben!