Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück

WS 2009/10
17.12.2009

Übungen zu Stochastik II - Blatt 10

(Abgabe: Donnerstag, 07.01.2010, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Sei $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ein Wiener Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeige, dass es genau eine lineare Isometrie $I : L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \nu_1) \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gibt, so dass $I(1\!\!1_{(s,t]}) = X_t - X_s$ für alle $t > s \geq 0$. Dabei bezeichnet ν_1 das Lebesgue-Maß. Ein linearer Operator $I : V_1 \to V_2$ zwischen zwei normierten Vektorräumen V_1 und V_2 heißt Isometrie, falls $\|I(v)\|_{V_2} = \|v\|_{V_1}$ für alle $v \in V_1$. Insbesondere ist I dann stetig und inkjektiv. Die in dieser Aufgabe diskutierte Isomterie definiert das stochastische Integral $I(f) = \int f \, dX_t(\omega)$ auf $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \nu_1)$, obwohl dieses im Lebesgue-Stieltjes Sinne nicht definiert ist. (6)

Aufgabe 2

Betrachte die folgende Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(t) = e^{\psi(t)} \quad \text{, wobei} \quad \psi(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}(\cos(2^k t) - 1)\,.$$

Zeige, dass $\varphi(t)$ die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung ist. (4)

Hinweis: Betrachte die Lévy-Chintschin-Darstellung mit Maß $\nu(\{\pm 2^k\}) = 2^{-k}, k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine reellwertige Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F und charakteristischer Funktion φ.

(a) Zeige: Falls X unbegrenzt teilbar ist, dann gilt $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. (4)

Hinweis: Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(s)| = 1\!\!1_{\{\varphi(s)\neq 0\}}$ für alle $s \in \mathbb{R}$, falls $\varphi(s) = \big(\varphi_n(s)\big)^n$. Zeige, dass daraus folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = 1\!\!1_{\{\varphi(s)\neq 0\}}$. Benutze dabei ohne Beweis, dass für eine Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} c_n = e^{i\theta}$, wobei $0 < \theta < 2\pi$, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} c_n^n$ nicht existiert.

(b) Es gelte P-fast sicher $|X| \leq c$ für ein $c < \infty$. Zeige: Die Zufallsvariable X ist genau dann unbegrenzt teilbar, wenn X P-fast sicher konstant ist. (4)

Hinweis: Zeige $P(|X_{j,n}| \leq \frac{c}{n}) = 1$ für $\sum_{j=1}^{n} X_{j,n} \stackrel{d}{=} X$, und folgere $\mathrm{Var}(X) = 0$.

(c) Gib ein Beispiel (mit Begründung) für eine Verteilung an, die nicht unbegrenzt teilbar ist. (2)