Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück

WS 2009/10
07.01.2010

Übungen zu Stochastik II - Blatt 11

(Abgabe: Donnerstag, 14.01.2010, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Die Zufallsvariable X habe eine stabile Verteilung mit Stabilitätsfaktor α.

(a) Zeige, dass X unbegrenzt teilbar ist. (2)

Es gelte nun zusätzlich $X \stackrel{d}{=} -X$.

(b) Weise nach, dass $\big(\varphi_X(s)\big)^n = \varphi_X(n^{1/\alpha}s)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$. (2)

(c) Zeige mit Hilfe von (b), dass $\varphi_X(s) = e^{-c_\alpha |s|^\alpha}$ gilt. (4)

(d) Widerlege mit Hilfe von (b), dass die Funktion $\varphi(t)$ aus Aufgabe 2 von Blatt 10 die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung ist. (2)

Aufgabe 2

Sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess mit Charakteristik (a, b, ν), wobei ν ein endliches Maß ist, d.h. $\nu(\mathbb{R}) < \infty$.

(a) Zeige, dass man X_t als Summe zweier unabhängiger Lévy-Prozesse Y_t und Z_t darstellen kann, wobei Y_t ein Wiener-Prozess mit Drift ist und Z_t ein zusammengesetzter Poisson-Prozess. (4)

(b) Zeige, dass ein Lévy-Prozess mit Charakteristik (a, b, ν), wobei ν ein endliches Maß ist, mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich viele Sprungstellen in einem beliebigen kompakten Intervall hat. (1)

Aufgabe 3

Der Lévy-Prozess $\{X_t, t \geq 0\}$ sei ein Gamma-Prozess mit Parametern $b, p > 0$, das heißt, für jedes $t \geq 0$ gelte $X_t \sim \Gamma(b, p\,t)$. Zeige, dass $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Subordinator ist mit dem Laplace-Exponenten $\xi(u) = \int_0^\infty (1 - e^{-uy})\,\nu(dy)$ für $\nu(dy) = p\,y^{-1}e^{-by}dy$, $y > 0$, d.h. zeige, dass $\mathbb{E}e^{-uX_t} = e^{-t\xi(u)}$ für alle $u \geq 0$ und dass $\int_0^\infty \min\{1, y\} p y^{-1} e^{-by} dy < \infty$. (4)

Aufgabe 4

Melde Dich bitte **bis spätestens 14.01.2010** im Hochschulportal unter

`https://campusonline.uni-ulm.de/qislsf/`

für die Vorleistung zur Vorlesung "Stochastik II" an! (0)