Prof. Dr. V. Schmidt WS 2009/10
J. Rumpf / S. Lück 14.01.2010

Übungen zu Stochastik II - Blatt 12

(Abgabe: Donnerstag, 21.01.2010, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Zeige Theorem 3.6.: Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit

$$\mathbb{E}\,|X| < \infty\,, \qquad \mathbb{E}\,|Y| < \infty\,, \qquad \mathbb{E}\,|XY| < \infty\,,$$

und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine beliebige Teil–σ–Algebra von $\mathcal{F}$. Dann gilt

1. $\mathbb{E}\,(X \mid \{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}\,X$, $\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{F}) = X$,
2. $\mathbb{E}\,(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\,\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}) + b\,\mathbb{E}\,(Y \mid \mathcal{G})$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$,
3. $\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}\,(Y \mid \mathcal{G})$, falls $X \leq Y$,
4. $\mathbb{E}\,(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G})$, falls Y eine $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$–messbare Zufallsvariable ist,
5. $\mathbb{E}\,\big(\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}_2) \mid \mathcal{G}_1\big) = \mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}_1)$, falls $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ Teil–σ–Algebren von $\mathcal{F}$ sind mit $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$,
6. $\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}\,X$, falls die σ–Algebren $\mathcal{G}$ und $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ unabhängig sind, d.h., falls $P(A \cap A') = P(A)P(A')$ für beliebige $A \in \mathcal{G}$ und $A' \in \sigma(X)$.
   Hinweis: Wenn $\mathcal{G}$ und $\sigma(X)$ unabhängig sind, gilt insbesondere, dass die Zufallsvariablen $1\!\!1_A$ und X unabhängig sind für alle $A \in \mathcal{G}$.
7. $\mathbb{E}\,\big(f(X) \mid \mathcal{G}\big) \geq f\big(\mathbb{E}\,(X \mid \mathcal{G})\big)$, falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist, so dass $\mathbb{E}\,|f(X)| < \infty$.
   Hinweis: Für konvexe Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f(x) = \sup\{\ell(x) \ : \ \ell(y) \leq f(y)\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ell \text{ hat die Form } \ell(y) = ay + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}\ \forall x \in \mathbb{R}$. (10)

Aufgabe 2
Betrachte die Zufallsvariablen X und Y über dem W-Raum $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \frac{1}{2}\nu)$ mit $\mathbb{E}\,|X| < \infty$. Bestimme für die folgenden Zufallsvariablen jeweils $\sigma(Y)$ und eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(X\,|\,Y)$ (in Abhängigkeit von X).

(a) $Y(\omega) = \omega^5$, (3)

(b) $Y(\omega) = (-1)^k$ für $\omega \in [\frac{k-3}{2}, \frac{k-2}{2}), k = 1, \ldots, 4$, und $Y(1) = 1$. (3)

Aufgabe 3
Bonusaufgabe: Der Zufallsvektor $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sei absolutstetig mit der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$ und den Randdichten $f_X(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ und $f_Y(y) : \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Außerdem sei $\mathbb{E}|X| < \infty$.
Zeige: Eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}(X|Y)$ ist gegeben durch

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \begin{cases} \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, Y(\omega)) dx}{f_Y(Y(\omega))} & , \text{falls } f_Y(Y(\omega)) > 0, \\ 0 & , \text{falls } f_Y(Y(\omega)) = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Die Messbarkeit bzgl. $\sigma(Y)$ muss nicht gezeigt werden. (4*)