Prof. Dr. V. Schmidt WS 2009/10
J. Rumpf / S. Lück 21.01.2010

Übungen zu Stochastik II - Blatt 13

(Abgabe: Donnerstag, 28.01.2010, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Es seien S und T Stoppzeiten bzgl. einer Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

(a) Zeige, dass $\min\{S,T\}, \max\{S,T\}, S+T$ und $\alpha T, \alpha \geq 1$, Stoppzeiten sind. (5)

(b) Zeige, dass $S-T$ im allgmeinen keine Stoppzeit ist. (1)

Aufgabe 2

Zeige das Theorem über die monotone Konvergenz von bedingten Erwartungen: Es seien X und $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ integrierbare Zufallsvariablen über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mit $X_n \geq 0$ und $X_n \nearrow X$ (fast sicher). Dann gilt fast sicher $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$, wobei $\mathcal{G}$ eine beliebige Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ sei. (3)

Aufgabe 3

Seien $\{X_t, t \geq 0\}, \{Y_t, t \geq 0\}$ Submartingale und $\{U_t, t \geq 0\}, \{V_t, t \geq 0\}$ Supermartingale über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bzgl. der Filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Zeige: $\{\max\{X_t, Y_t\}, t \geq 0\}$ ist ein Submartingal und $\{\min\{U_t, V_t\}, t \geq 0\}$ ist ein Supermartingal. (4)

Aufgabe 4

Sei $\{X_t, t \geq 0\}$ ein Wiener–Prozess. Zeige, dass $\{X_t, t \geq 0\}$, $\{X_t^2 - t, t \geq 0\}$ und $\{e^{uX_t - u^2 t/2}, t \geq 0\}$, für ein beliebiges (aber festes) $u \in \mathbb{R}$, Martingale bzgl. der natürlichen Filtration $\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$ sind. (6)