Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück WS 2009/10
28.01.2010

Übungen zu Stochastik II - Blatt 14

(Abgabe: Donnerstag, 04.02.2010, vor den Übungen)

Ein diskretes Martingal bezüglich einer Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so dass X_n bezüglich $\mathcal{F}_n$ messbar ist und $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n) = X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine diskrete Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so dass $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, wobei $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n\}$. Ein Optional-Sampling-Theorem gilt für diskrete Martingale in analoger Weise zum zeitkontinuierlichen Fall.

Aufgabe 1

Seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein diskretes Martingal und T eine diskrete Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass auch $\{X_{T\wedge n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist. (4)

Aufgabe 2

Sei $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein einfacher symmetrischer Random Walk, d.h. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, wobei $X_1, X_2, \ldots$ iid mit $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Sei $T = \inf\{n : \; |S_n| > \sqrt{n}\}$ und $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass T eine Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist. (1)

(b) Zeige, dass $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n = S^2_{T\wedge n} - (T \wedge n)$ ein Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist. (2)

(c) Zeige, dass $|g_n| \leq 4T$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (3)

(d) Zeige, dass $\mathbb{E}T = \infty$. (2)

Aufgabe 3

Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid mit $E|X_1| < \infty$. Sei $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, und sei T eine Stoppzeit bezüglich $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{E}T < \infty$.

(a) Zeige die Waldsche Identität, d.h. $\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}T\mathbb{E}X_1$, wobei $S_T = \sum_{i=1}^T X_i$. (4)

(b) Sei zusätzlich $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $T = \inf\{n : \; S_n < 0\}$. Zeige, dass $\mathbb{E}T = \infty$. (2)

Dies ist das letzte Übungsblatt des Semesters. Für die Zulassung zur Klausur sind 124 Punkte hinreichend.
Melde Dich bitte **zwischen Dienstag, dem 09.02.2010, und Donnerstag, dem 11.02.1010**, im Hochschulportal unter

`https://campusonline.uni-ulm.de/qislsf/`

für die Klausur zur Vorlesung "Stochastik II" an!