Prof. Dr. V. Schmidt
J. Rumpf / S. Lück

WS 2009/10
22.10.2009

Übungen zu Stochastik II - Blatt 2

(Abgabe: Donnerstag, 29.10.2009, vor den Übungen)

Aufgabe 1

(a) Sei $\lambda > 0$ und $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und auf dem Intervall $(0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Zeige, dass die Zufallsvariablen $\frac{-\log U_1}{\lambda}, \frac{-\log U_2}{\lambda}, \ldots$ unabhängig und exponentialverteilt sind mit Parameter λ. (2)

(b) Formuliere mit Hilfe von Aufg. 1 auf Blatt 1 einen Algorithmus zur Simulation einer Poisson-verteilten Zufallsvariable mit Parameter λ. (2)

Aufgabe 2

(a) Schreibe ein Programm, dem als Parameter eine Intervallobergrenze t und eine Intensität λ übergeben werden und das für eine Realisierung eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität λ alle Erneuerungszeitpunkte im dem Intervall $[0, t]$ sowie zusätzlich die zugehörige erwartete Anzahl von Erneuerungszeitpunkten ausgibt. (5)

(b) Schreibe eine zusätzliche Prozedur, welche die mittlere Anzahl von Erneuerungszeitpunkten im Intervall $[0, 100]$ für $\lambda = 0.2$ bei 1000 Durchläufen ausgibt. (1)

Bitte für diese und alle zukünftigen Programmieraufgaben folgendes beachten: Abzugeben ist ein Ausdruck des lesbar kommentierten Programmcodes *und* der (ggf. beispielhaften) Ausgaben. Bevorzugt werden Programme in Java. Lösungen in anderen gebräuchlichen Programmiersprachen werden auch akzeptiert, **wenn sie kommentiert, strukturiert und lesbar sind.**

Aufgabe 3

Es sei $\{N_t, t \geq 0\}$ ein Erneuerungsprozess mit Erneuerungsfunktion $H(t)$. Die Verteilungsfunktion der zugehörigen Zwischenankunftszeiten sei mit $F(t)$ bezeichnet.

Bitte wenden!

(a) Zeige:

$$\mathbb{E}(N_t^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)F^{*(n)}(t).$$

(2)

(b) (i) Bestimme die Laplace-Stieltjes-Transformierte von $\sum_{n=1}^{\infty} nF^{*(n)}(t)$.

(ii) Benutze (i), um $\sum_{n=1}^{\infty} nF^{*(n)}(t)$ durch $H(t)$ auszudrücken. (2)

(c) Drücke $\mathbb{E}(N_t^2)$ durch $H(t)$ aus. (1)

Hinweise: Die Laplace-Stieltjes-Transformierte $\ell_F : [0,\infty) \to [0,1)$ einer monotonen, rechtsstetigen Funktion F, die im Intervall $(-\infty, 0)$ konstant ist, ist definiert als $\ell_F(s) = \mathbb{E}e^{-sX} = \int_0^\infty e^{-st}dF(t)$. Folgende Aussagen dürfen ohne Beweis verwendet werden:

- Seien F_1 und F_2 Funktionen mit den genannten Eigenschaften, dann gilt

$$\ell_{F_1 * F_2}(s) = \ell_{F_1}(s)\ell_{F_2}(s)\ \forall s \geq 0.$$

- Gilt für zwei Verteilungsfunktionen F_1 und F_2, dass $\ell_{F_1}(s) = \ell_{F_2}(s)$, $\forall s \geq 0$, so ist $F_1 = F_2$.
- Für eine Folge $\{F_n\}$ von Funktionen mit den genannten Eigenschaften und jede Borel-messbare Funktion $g \geq 0$ gilt

$$\int_0^\infty g(t)d(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty g(t)dF_n(t).$$